

## Раздел 1. Векторы и координаты

В этом разделе вы узнаете о важнейших понятиях современной математики – о векторах и координатах. И векторы, и координаты используются в других науках (физике, астрономии, географии); они помогают при решении математических задач, в том числе геометрических.

### Тема: **Векторный метод**

#### Содержание темы

- 1.1. Скалярные и векторные величины. Понятие вектора. Направленные отрезки.
- 1.2. Сонаправленные векторы.
- 1.3. Равенство векторов.
- 1.4. Угол между векторами.
- 1.5. Сложение векторов.
- 1.6. Свойства сложения векторов.
- 1.7. Вычитание векторов. Взаимно обратные векторы.
- 1.8. Умножение вектора на число.
- 1.9. Распределительные законы умножения вектора на число.
- 1.10. Векторная алгебра и векторный метод.

#### **1.1. Скалярные и векторные величины. Понятие вектора. Направленные отрезки.**

Многие величины полностью характеризуются своими численными значениями: длина, площадь, объем, температура, масса, цена и т.д. Такие величины называют **скалярными величинами** или, короче, **скалярами**. Но есть и такие величины, которые характеризуются не только своими численными значениями, но и направлением: сила, скорость, перемещение. Например, мало знать, что скорость автомобиля равна 50 км/час – надо еще знать, в каком направлении движется этот автомобиль. Еще пример: мы знаем, что туристы переместились на 10 км. Но куда? На север, на юг, на запад, на восток? Надо еще знать направление. Его обычно указывают стрелкой (рис.1.1).

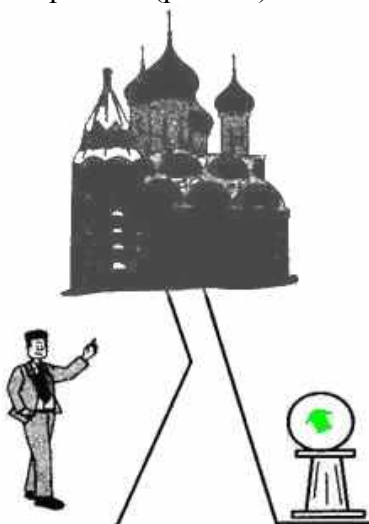


Рис.1.1

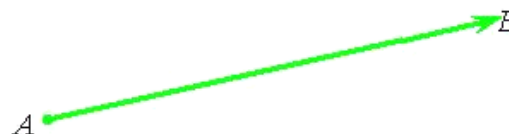


Рис.1.2

Величины, которые характеризуются численными значениями и направлением, называют **векторными величинами** или, короче, **векторами**. Численное значение вектора называют его **модулем** (или **абсолютной величиной**).

Для обозначения векторов употребляются латинские буквы и стрелки:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ . Это обозначение читают так: “вектор  $a$ ”, “вектор  $b$ ” и т.п. Для модулей векторов употребляются знак модуля:  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \dots$ .

Векторы изображают направленными отрезками. Если один из концов отрезка считать первым (его называют **началом**), а другой из его концов считать вторым (его называют **концом**), то получается **направленный отрезок**. Рисуют направленный отрезок со стрелкой на конце (рис.1.2). Обозначают направленный отрезок с началом  $A$  и концом  $B$  так:  $\overrightarrow{AB}$ .

Две точки  $A$  и  $B$  задают два направленных отрезка:  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$ . И в то время как отрезки  $AB$  и  $BA$  - это два разных названия одного и того же отрезка, направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$  различны.

Направленные отрезки тоже называют векторами, хотя это и не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же.

Если направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$  изображает вектор  $\vec{v}$ , то пишем  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  и говорим: “Вектор  $\overrightarrow{AB}$  равен вектору  $\vec{v}$ ” (рис.1.3).

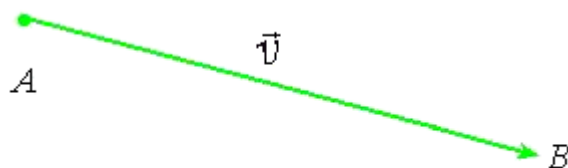


Рис.1.3

Модулем вектора  $\vec{v}$  считается длина отрезка  $AB$ :  $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$ . Поэтому в геометрии модуль вектора называют также **длиной вектора**.

Из всех векторов особый случай представляет **нулевой вектор** или **нуль-вектор**: его модуль равен нулю, а направления он не имеет. Обозначается нуль-вектор так:  $\vec{0}$ .

Нулевой вектор изображается любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора.

Так как нуль-вектор изображается точкой, то равенство  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  означает, что точки  $A$  и  $B$  совпадают.

После того, как появился нуль-вектор, уже нельзя сказать, что каждый вектор изображается направленным отрезком (каждый, кроме нулевого).

В дальнейшем изложении теории в пунктах 1-4 мы будем полагать векторы ненулевыми. Если же нам понадобится и нулевой вектор, то это будет оговорено специально.

Говорят, что вектор лежит на прямой (на плоскости), если изображающий его направленный отрезок лежит на прямой (на плоскости).

Говорят, что вектор параллелен прямой (плоскости), если изображающий его направленный отрезок параллелен прямой (плоскости).

Говорят, что вектор перпендикулярен прямой (плоскости), если изображающий его направленный отрезок перпендикулярен прямой (плоскости).

Говорим, что векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  параллельны (перпендикулярны), если параллельны (перпендикулярны) прямые  $AB$  и  $CD$ . Для обозначения параллельности и перпендикулярности векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  употребляются обычные символы:  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$  (рис.1.4). Перпендикулярные векторы называют также **ортогональными векторами**.

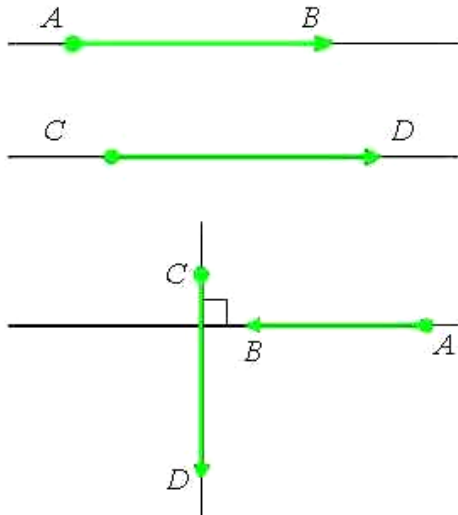


Рис.1.4

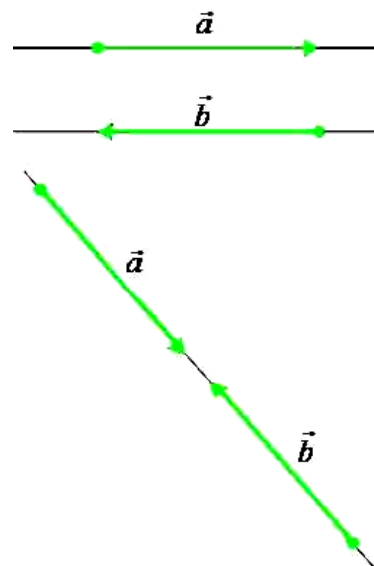


Рис.1.5

И, наконец, векторы называются **коллинеарными**, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой (рис.1.5). Для коллинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  применяется обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Нуль-вектор считается и коллинеарным, и ортогональным любому вектору.

*Справка словесника.* Слово *vector* - латинское и в примерном переводе означает *переносчик* (*переносящий, несущий*). Вектор  $\overrightarrow{AB}$  как бы переносит начало вектора - точку  $A$  в его конец - точку  $B$ .

Слово *модуль* происходит от латинского слова *modulus* и переводится как *мера*. Слова *модуль, мода, модификация* (*изменение*) - однокоренные слова.

В слове *коллинеарный* латинская приставка *col* - имеет значение *с-, со-*, а латинский корень *linea* - говорит о прямой линии, т.е. это слово говорит о векторах, *идущих вместе с некоторой прямой*. (Обратите внимание, что эта же приставка в словах *коллегия, коллектив, коллекция*).

Слово *ортогональный* в переводе с греческого означает *прямоугольный*.

### Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается векторная величина от скалярной?
2. Приведите примеры векторных и скалярных величин.
3. Что такое направленный отрезок? Чем он отличается от отрезка?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Какие векторы называются ортогональными?

### Задачи

**Смотрим. 1.1.** Дан прямоугольник  $ABCD$ . Назовите векторы, заданные вершинами прямоугольника. Какие из них: а) лежат на прямой  $AC$ ; б) параллельны прямой  $CD$ ; в) перпендикулярны прямой  $BC$ ?

**1.2.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Назовите векторы, заданные его вершинами и точкой пересечения диагоналей. Какие из них: а) коллинеарны  $\overrightarrow{AB}$ ; б) коллинеарны  $\overrightarrow{AC}$ ; в) коллинеарны  $\overrightarrow{BO}$ ?

**1.3.** Дан квадрат  $ABCD$ . Назовите векторы, заданные его вершинами и перпендикулярные: а)  $\overrightarrow{AB}$ ; б)  $\overrightarrow{AD}$ , в)  $\overrightarrow{AC}$ .

**1.4.** В равностороннем треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AK$  и  $BM$  и средняя линия  $KM$ . Назовите коллинеарные и взаимно перпендикулярные векторы, заданные точками  $A, B, C, K, M$ .

**1.5.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите вектор, заданный его вершинами и а) коллинеарный вектору  $\overrightarrow{AD}$ ; б) коллинеарный вектору  $\overrightarrow{AB}$ ; в) коллинеарный вектору  $\overrightarrow{AA_1}$ ; г) коллинеарный вектору  $\overrightarrow{AC}$ ; д) перпендикулярный вектору  $\overrightarrow{AD}$ ; е) перпендикулярный вектору  $\overrightarrow{BD}$ ; ж) параллельный плоскости  $BB_1 C_1$ ; з) перпендикулярный плоскости  $CDD_1$ .

**1.6.** В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$  с основанием  $ABCD$  ее боковые грани являются правильными треугольниками. Назовите взаимно перпендикулярные векторы, заданные вершинами пирамиды. Есть ли среди этих векторов такие, которые лежат на боковых ребрах пирамиды?

**Рисуем. 1.7.** Нарисуем прямую  $a$ . Нарисуйте вектор: а) лежащий на прямой  $a$ ; б) параллельный прямой  $a$ ; в) перпендикулярный прямой  $a$ .

**1.8.** Нарисуйте какой-либо вектор, а затем вектор: а) параллельный данному; б) коллинеарный данному; в) перпендикулярный данному.

**1.2. Сонаправленность векторов.** Слово *направление* чаще всего связано с движением: пешехода, корабля, самолета, поезда (рис.1.6).

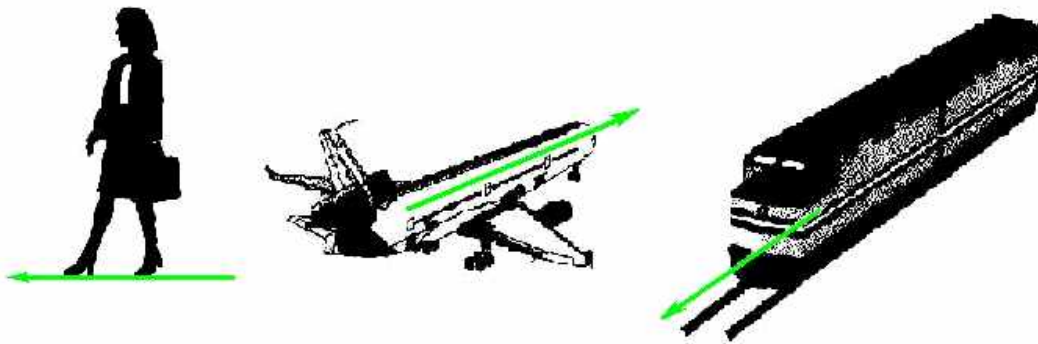


Рис.1.6

Указывают направление обычно стрелкой, например, стрелкой компаса или указателя. Векторы тоже имеют направление. У неколлинеарных векторов - разные направления (рис.1.7,а). Коллинеарные векторы имеют либо **одинаковые направления** (рис.1.7,б), либо **противоположные направления** (рис.1.7,в).

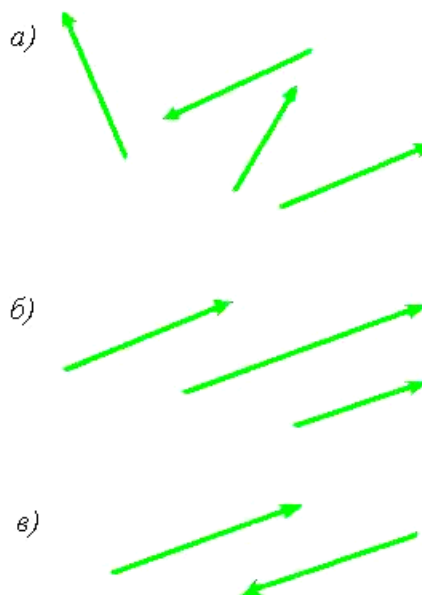


Рис.1.7

О векторах, имеющих одинаковые направления, говорят, что они **сонаправлены**.

Наглядным представлением о сонаправленных векторах можно дать точное определение. Это можно сделать по-разному. Для векторов, лежащих на одной плоскости, мы поступим так.

**О п р е д е л е н и е.** Два вектора  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  на плоскости (а также лучи  $AB$  и  $CD$ ) называются **сонаправленными**, если лучи  $AB$  и  $CD$  лежат в какой-либо одной полуплоскости и перпендикулярны ее границе (рис.1.8).

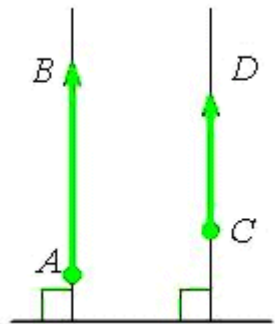


Рис.1.8

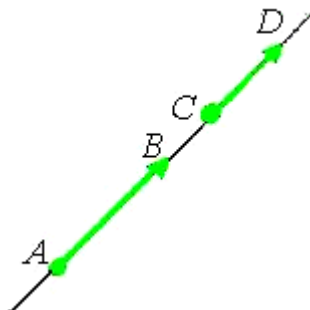


Рис.1.9

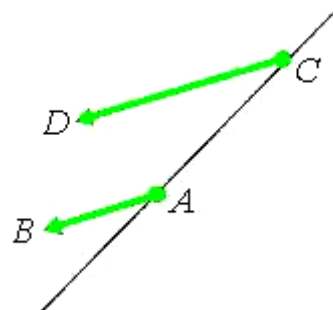


Рис.1.10

Можно сказать и так: на плоскости векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  (а также лучи  $AB$  и  $CD$ ) сонаправлены, если лучи  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны некоторой прямой и лежат с одной стороны от неё.

Из этого определения сразу же следует, что *сонаправленные векторы коллинеарны*, т.е. параллельны или лежат на одной прямой.

Ясно, что *векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ , лежащие на одной прямой, сонаправлены тогда и только тогда, когда один из лучей  $AB$  или  $CD$  содержит другой луч* (рис.1.9). А *параллельные векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  сонаправлены тогда и только тогда, когда лучи  $AB$  и  $CD$  лежат по одну сторону от прямой  $AC$*  (рис.1.10).

Если векторы коллинеарны, но не сонаправлены, то их называют **противоположно направленными**.

Если векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  сонаправлены, то пишут  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ . Если векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  противоположно направлены, то пишут  $\overline{AB} \downarrow \uparrow \overline{CD}$ .

Чтобы установить сонаправленность двух векторов, можно (кроме определения сонаправленности) использовать **признак сонаправленности**:

**два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.**

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  сонаправлены с вектором  $\overline{KL}$  (рис.1.11). Докажем, что  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ .

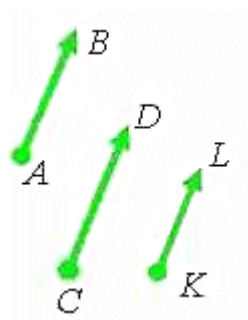


Рис.1.11

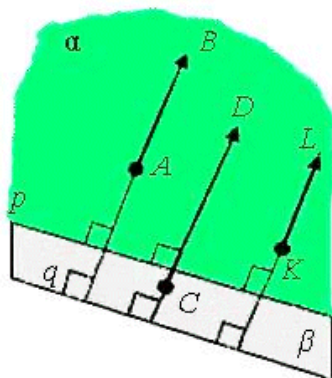


Рис.1.12

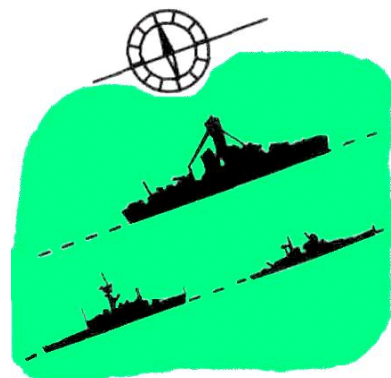


Рис.1.13

Так как  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{KL}$ , то лучи  $AB$  и  $KL$  лежат в некоторой полуплоскости  $\alpha$  и перпендикулярны ее границе - прямой  $p$  (рис.1.12).

Аналогично, поскольку  $\overline{CD} \uparrow \uparrow \overline{KL}$ , то лучи  $CD$  и  $KL$  лежат в некоторой полуплоскости  $\beta$  и перпендикулярны ее границе - прямой  $q$ . Поскольку прямые  $p$  и  $q$  перпендикулярны прямой  $KL$ , то они параллельны (или совпадают). Следовательно, одна из полуплоскостей  $\alpha$  или  $\beta$  содержит другую полуплоскость (на рисунке 1.12 - это полуплоскость  $\beta$ ). В этой полуплоскости и лежат все три луча  $AB$ ,  $CD$ ,  $KL$  и все они перпендикулярны ее границе. Итак,  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}$ . ■

Вот пример из практики, иллюстрирующий этот признак: когда командир флагманского корабля командует остальным кораблям следовать тем же курсом, которым следует его корабль, то он тем самым обеспечивает одинаковый курс у любых двух кораблей эскадры (рис.1.13).

Обратимся теперь к векторам в пространстве. Чтобы определить сонаправленность векторов в пространстве, достаточно заменить в данном выше определении слово *полуплоскость* на слово *полупространство* (рис.1.14). Поскольку границей полупространства является плоскость, то в доказательстве признака сонаправленности речь пойдет не о прямых, а о плоскостях, перпендикулярных одной прямой  $KL$  (рис.1.15). Повторите это доказательство для пространственного случая.

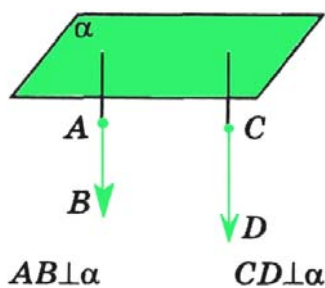


Рис.1.14

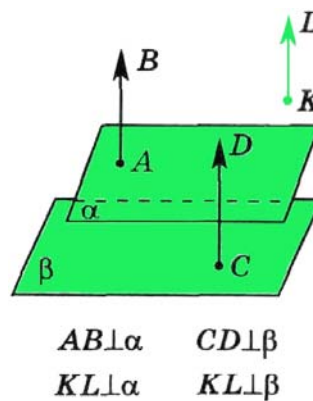


Рис.1.15

### Вопросы для самоконтроля

1. Какие два луча на плоскости называются сонаправленными?
2. Какие два вектора  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называются сонаправленными?
3. Какие два вектора называются противоположно направленными?
4. В чем состоит признак сонаправленности векторов?
5. Как определить сонаправленность лучей и векторов в пространстве?

### Задачи

**Смотрим. 2.1.** В параллелограмме  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Назовите векторы: а) сонаправленные с  $\overline{AB}$ ; б) сонаправленные с  $\overline{AC}$ ; в) противоположно направленные вектору  $\overline{DO}$ .

**2.2.** В треугольнике  $ABC$  проведены средние линии  $KL$ ,  $LM$ ,  $MK$ . Назовите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов, заданных точками  $A, B, C, K, L, M$ .

**2.3.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите вектор, заданный его вершинами и: а) сонаправленный с вектором  $\overline{AD}$ ; б) сонаправленный с вектором  $\overline{AB}$ ; в) противоположно направленный вектору  $\overline{AA_1}$ ; г) сонаправленный с вектором  $\overline{AC}$ .

**Рисуем. 2.4.** Нарисуйте какой-либо вектор, а затем вектор: а) сонаправленный с нарисованным вектором; б) направленный противоположно нарисованному.

**Представляем. 2.5.** Что можно сказать о направлении векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{BA}$ ?

**2.6.** Точка  $M$  лежит на прямой  $AB$ . В каком случае векторы  $\overline{AM}$  и  $\overline{BM}$  сонаправлены? А когда они направлены противоположно?

**2.7.** Известно, что  $\overline{a} \downarrow \uparrow \overline{b}$  и  $\overline{b} \downarrow \uparrow \overline{c}$ . Каково взаимное расположение векторов  $\overline{a}$  и  $\overline{c}$ ?



**1.3. Равенство векторов.** Векторы полностью характеризуются длиной и направлением. Поэтому два вектора называются равными, если, во-первых, их длины равны и, во-вторых, они сонаправлены (рис.1.16).

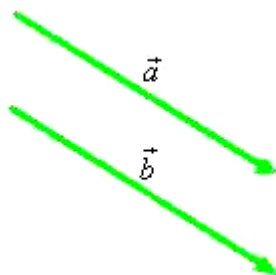


Рис.1.16

Итак,  $\vec{a} = \vec{b}$ , если 1)  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  и 2)  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ .

Ясно, что одно лишь первое условие не достаточно для равенства векторов: на рис.17,а длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны, но векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не равны. Аналогично, и одной сонаправленности двух векторов мало для их равенства: на рис.17,б векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{PQ}$  сонаправлены, но не равны.

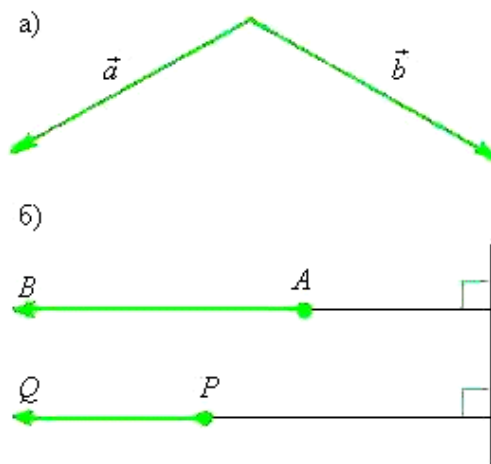


Рис.1.17

Нам часто придется выполнять такое построение: от выбранной точки **откладывать вектор, равный данному вектору**. Оно осуществляется так.

Зададим некоторую точку  $C$  и зададим некоторый вектор  $\vec{a}$ , например направленным отрезком  $\vec{AB} = \vec{a}$  (рис.18,а). Требуется построить такую точку  $D$ , что  $\vec{CD} = \vec{AB}$ . Чтобы построить эту точку  $D$ , во-первых, из точки  $C$  проведем луч  $p$ , сонаправленный с лучом  $AB$  (рис.18,б). Такой луч  $p$  лишь один. Теперь на луче  $p$  откладываем отрезок  $CD = AB$  (рис.18,в). Точка  $D$  построена. Ясно, что такая точка лишь одна.

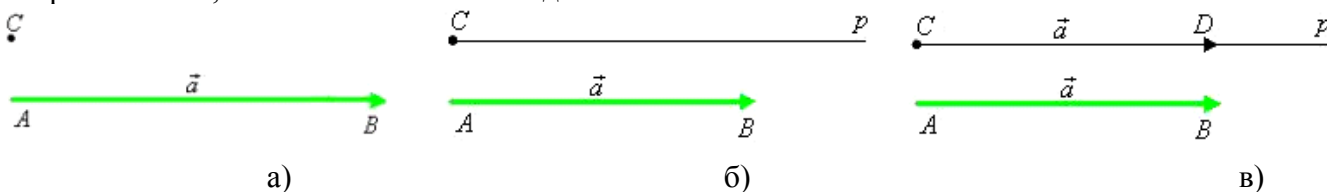


Рис.1.18

Итак, мы доказали следующее утверждение: *от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и притом только один.* ■

Равенство векторов обладает всеми обычными свойствами равенств. В частности, **два вектора, равные третьему вектору, равны друг другу** (это свойство назовем *первым признаком равенства векторов*). Докажем его.

□ Пусть  $\vec{a} = \vec{c}$  и  $\vec{b} = \vec{c}$ . Тогда, во-первых  $|\vec{a}| = |\vec{c}|$  и  $|\vec{b}| = |\vec{c}|$ . Поэтому  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ . Во-вторых, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  сонаправлены, а также векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  сонаправлены. Поэтому, согласно признаку сонаправленности векторов, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены. Поскольку, как уже доказано, и  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ . ■

Если  $\vec{CD} = \vec{AB}$  и точка  $C$  не лежит на прямой  $AB$ , то четырехугольник  $ABDC$  - параллелограмм (напомним, что *четырёхугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны – параллелограмм*, рис.1.19). Верно и обратное утверждение: *если четырёхугольник  $ABDC$  - параллелограмм, то  $\vec{CD} = \vec{AB}$* . Действительно, в этом случае векторы  $\vec{CD}$  и  $\vec{AB}$  сонаправлены и имеют равные длины.

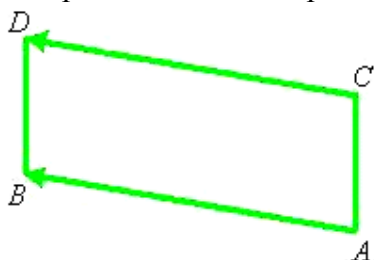


Рис.1.19



Рис.1.20

Объединяя эти два взаимно обратных утверждения, получаем *второй признак равенства векторов: если точка  $C$  не лежит на прямой  $AB$ , то  $\vec{CD} = \vec{AB}$  тогда и только тогда, когда четырёхугольник  $ABDC$  - параллелограмм.*

Рисунок 1.19 подсказывает нам еще один (уже *третий*) признак равенства векторов: ведь то, что четырехугольник  $ABDC$  - параллелограмм, можно установить, используя примененный признак параллелограмма, по любой из его пар противоположных сторон. Поэтому:  $\vec{AB} = \vec{CD}$  *тогда и только тогда, когда  $\vec{AC} = \vec{BD}$* .

Этот признак справедлив и для точек  $A, B, C, D$ , лежащих на одной прямой. Введем на этой прямой координату  $x$  и пусть числа  $x_A, x_B, x_C, x_D$  – координаты этих точек (рис.1.20). Тогда условие  $\vec{AB} = \vec{CD}$  означает, что выполнено равенство

$$x_B - x_A = x_D - x_C \quad (1)$$

Из (1) вытекает

$$x_C - x_A = x_D - x_B \quad (2)$$

А равенство (2) и означает для векторов  $\vec{AC}$  и  $\vec{BD}$ , лежащих на одной прямой, равенство их длин и сонаправленность, т.е. их равенство:  $\vec{AC} = \vec{BD}$ . ■

### Вопросы для самоконтроля

1. Чем определяется равенство двух векторов?
2. Какие вам известны признаки равенства двух векторов?

### Задачи

**Смотрим. 3.1.** Дан прямоугольник  $ABCD$ . Среди векторов, заданных его вершинами, укажите равные.

**3.2.** Даны: а) отрезок  $AB$  и его середина  $O$ ; б) параллелограмм  $ABCD$  и две его диагонали, пересекающиеся в точке  $O$ . Среди векторов, заданных этими точками, укажите равные.

**Рисуем. 3.3.** Нарисуйте прямую и на ней две точки  $A$  и  $B$ . а) Нарисуйте вектор  $\vec{AB}$  и вектор  $\vec{BC} = \vec{AB}$ . б) Нарисуйте вектор  $\vec{BA}$  и вектор  $\vec{AD} = \vec{BA}$ . в) Равны ли векторы  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$ ?



**3.4.** Нарисуйте вектор  $\vec{a}$  и какую-нибудь точку  $A$ . Отложите от нее вектор  $\vec{AB} = \vec{a}$ . От точки  $B$  отложите вектор  $\vec{BC} = \vec{a}$ . Нарисуйте такую точку  $X$ , что  $\vec{XA} = \vec{a}$ .

**3.5.** Нарисуйте куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . а) Среди векторов, заданных его вершинами, укажите равные. б) От точки  $A$  отложите вектор, равный  $\vec{DA}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DD_1}$ . в) Те же задания, что и в предыдущем пункте, выполните для середины ребра  $B_1 C_1$ .

**Представляем. 3.6.** Сколько пар равных векторов задаются вершинами треугольной призмы?

**Исследуем. 3.7.** Пусть  $\vec{AB} = \vec{CD}$ . Какие еще равные векторы можно задать этими точками  $A, B, C, D$ ?

**3.8.** Нарисуйте треугольник  $ABC$ . Нарисуйте точку  $K$  и отложите векторы  $\vec{KL} = \vec{AB}$ ,  $\vec{LM} = \vec{BC}$ ,  $\vec{KN} = \vec{AC}$ . Что вы заметили? Как бы вы это объяснили?

**3.9.** Нарисуйте треугольник. От всех его точек отложите равные векторы. Концы этих векторов образуют новую фигуру. Сравните ее с нарисованным вами треугольником. Какое предположение вы сможете сделать. Сможете ли вы его обосновать? Решите аналогичные задачи для окружности и для куба.

**Рассуждаем. 3.10.** Что следует из условий: а)  $\vec{KL} = \vec{0}$ ; б)  $\vec{AB} = \vec{BA}$ ; в)  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  и  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ?

**1.4. Угол между векторами.** Начнем с простого частного случая: если векторы сонаправлены, то угол между ними полагается равным  $0^\circ$ . В общем случае, (когда векторы не сонаправлены) дается такое определение.

**О п р е д е л е н и е.** Углом между двумя ненулевыми векторами называется величина заданного ими угла, когда они отложены от одной точки (рис.1.21).

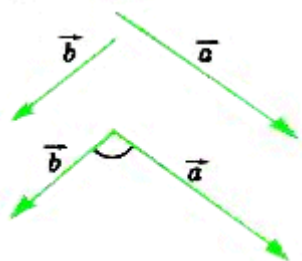


Рис.1.21

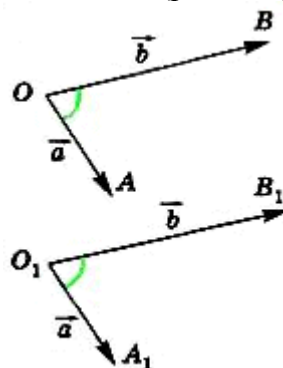


Рис.1.22

Обозначать угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будем так:  $\angle \vec{a} \vec{b}$ . Таким образом  $\angle \vec{a} \vec{b} = \angle AOB$ , если  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ .

Обратите внимание на то, что угол между векторами - это величина, а не фигура.

Из данного определения также следует, что угол между противоположно направленными векторами равен  $180^\circ$ .

Данное определение угла между векторами требует некоторого оправдания: следует установить, что величина угла  $AOB$  не зависит от выбора точки  $O$ . (Как говорят в математике, требуется установить корректность данного определения).

В самом деле, пусть мы хотим найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Их можно отложить от любой точки (рис.1.22). Встает вопрос: а будут ли равны полученные при этом углы? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема** (об углах с сонаправленными сторонами). Углы, стороны которых сонаправлены, равны.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим два угла, стороны которых сонаправлены:  $\angle ab$  с вершиной  $O$  и  $\angle a_1 b_1$  с вершиной  $O_1$  (рис.1.23,а). Считаем, что  $a \uparrow a_1$  и  $b \uparrow b_1$ . Покажем, что  $\angle ab = \angle a_1 b_1$ .

Отложим на лучах  $a$  и  $a_1$  равные друг другу отрезки  $OA$  и  $O_1A_1$ , а на лучах  $b$  и  $b_1$  равные друг другу отрезки  $OB$  и  $O_1B_1$  (рис.1.23,б). Так как  $OA = O_1A_1$  и  $a \uparrow a_1$ , то  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$ . Из этого равенства и третьего признака равенства векторов следует, что  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$  (рис.1.23,в).

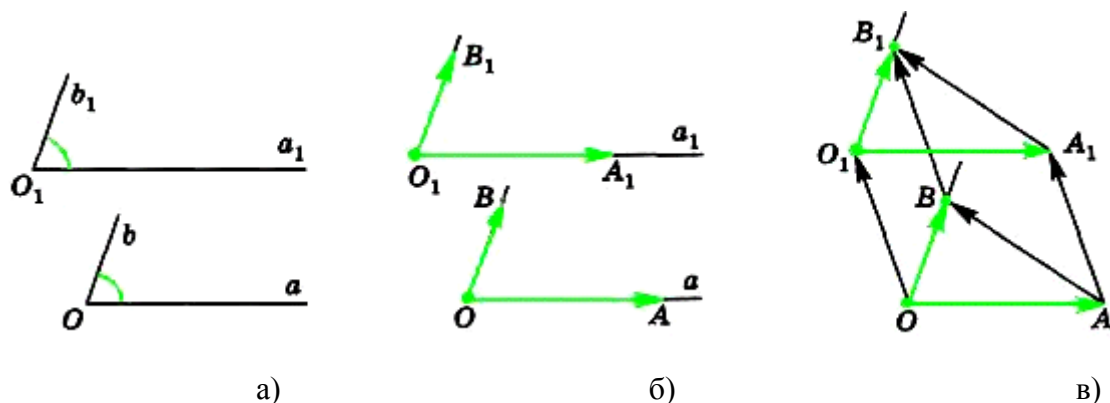


Рис.1.23

Аналогично, так как  $OB = O_1B_1$  и  $b \uparrow b_1$ , то  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O_1B_1}$ , и  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{BB_1}$ . Поскольку  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{BB_1}$ , то  $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$  (снова по третьему признаку равенства векторов).

Итак, соответственные стороны треугольников  $OAB$  и  $O_1A_1B_1$  равны:  $OA = O_1A_1$ ,  $OB = O_1B_1$ ,  $AB = A_1B_1$ . Поэтому  $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ , т.е.  $\angle ab = \angle a_1b_1$ . ■

Еще раз подчеркнем, что понятие угла между векторами, а также сонаправленности и противоположной направленности векторов определяется лишь для ненулевых векторов.

### Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит теорема об углах с сонаправленными сторонами?
2. Как определяется угол между ненулевыми векторами?
3. Чему равен угол между сонаправленными векторами?
4. Чему равен угол между противоположно направленными векторами?

### Задачи

**Рисуем. 4.1.** Нарисуйте какие-нибудь векторы, образующие угол в  $30^\circ$ : а)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ ; б)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BD}$ ; в)  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{XY}$ , где  $X$  - любая точка. Сделайте то же для угла  $140^\circ$ .

**Находим величину. 4.2.** Найдите величины углов между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{CA}$ , для таких треугольников  $ABC$ : а) равностороннего; б) равнобедренного прямоугольного с прямым углом  $C$ ; в) имеющего  $\angle A = 50^\circ$  и  $\angle B = 30^\circ$ ; г) имеющего  $\angle A = 50^\circ$  и  $AC = AB$ ; д) имеющего  $\angle A = \alpha$  и  $\angle B = \beta$ .

**4.3.** От вектора  $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$  по разные стороны от прямой  $OA$  расположены два вектора  $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$  так, что: а)  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} = 30^\circ$ ,  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{c} = 50^\circ$ ; б)  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} = 100^\circ$ ,  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{c} = 120^\circ$ ; в)  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{b} = \alpha$ ,  $\angle \overrightarrow{a} \overrightarrow{c} = \beta$ . Найдите угол между  $\overrightarrow{b}$  и  $\overrightarrow{c}$ .

**4.4.** Три вектора расположены на плоскости так, что угол между любыми двумя из них один и тот же. Чему равен этот угол?

**4.5.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Какой угол образуют между собой векторы: а)  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{DC_1}$ ; б)  $\overrightarrow{DB}$  и  $\overrightarrow{B_1C_1}$ ; в)  $\overrightarrow{AD_1}$  и  $\overrightarrow{B_1C}$ ; г)  $\overrightarrow{CB_1}$  и  $\overrightarrow{DC_1}$ ; д)  $\overrightarrow{A_1C_1}$  и  $\overrightarrow{B_1D}$ ; е)  $\overrightarrow{DC_1}$  и  $\overrightarrow{D_1A}$ ?

**1.5.Сложение векторов.** Если тело переместилось из точки  $A$  в точку  $B$  (рис.1.24,а), а потом из точки  $B$  переместилось в точку  $C$  (рис.1.24,б), то его суммарное перемещение из точки  $A$  в точку  $C$  представляется вектором  $\overrightarrow{AC}$  (рис.1.24,в). Так складываются векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

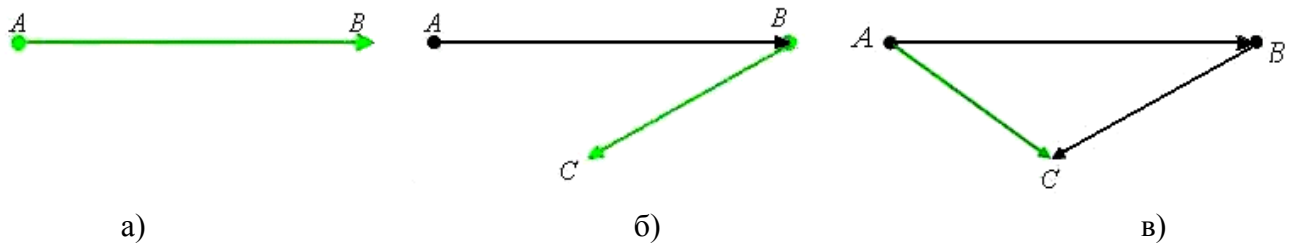


Рис.1.24

В рассмотренном случае конец первого вектора  $\overrightarrow{AB}$  является началом второго вектора  $\overrightarrow{BC}$ . В общем же случае векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  складываются так.

Откладывают от какой-либо точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный вектору  $\vec{a}$  (рис.1.24,б). Потом от точки  $B$  откладывают вектор  $\overrightarrow{BC}$ , равный вектору  $\vec{b}$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AC}$  представляет **сумму векторов**  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

Это правило получения суммы двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется **правилом треугольника** (потому что если векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$  не лежат на одной прямой, то их сумма представляет сторону  $AC$  треугольника  $ABC$ ).

Мы определили сумму данных векторов, отложенную от данной точки. А что будет, если взять другую точку? Оказывается, что сумма получится равной прежней. А именно, если отложить от точки  $A_1$  тот же вектор  $\vec{a}$ :  $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$ , равна а затем от точки  $B_1$  отложить вектор  $\vec{b}$ :  $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ , то сумма  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$  будет равна вектору  $\overrightarrow{AC}$ , полученному в равенстве (2), т.е.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$  (рис.1.25). Докажем это.

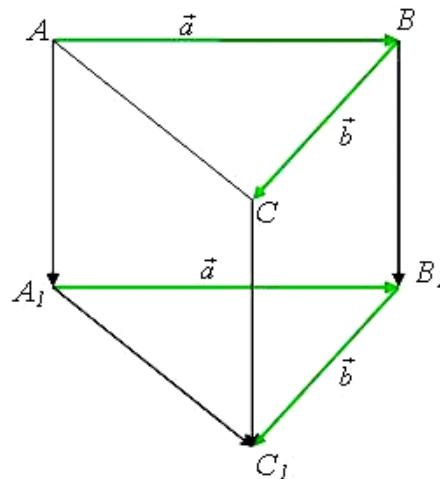


Рис.1.25

□ Так как  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$ , то согласно третьему признаку равенства векторов  $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$ . Аналогично из равенства  $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$  следует равенство  $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ . Поэтому  $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$ . Но из этого равенства по тому же третьему признаку равенство векторов следует, что  $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$ . ■

Правило треугольника естественно применяется при последовательных перемещениях тела: сначала перемещение  $\overrightarrow{AB}$ , затем  $\overrightarrow{BC}$ , а в сумме получаем перемещение  $\overrightarrow{AC}$ . А если тело одновременно испытывает два перемещения? Например, человек, идущий по палубе плывущего корабля (рис.1.26,а) или лодка, пересекающая реку (рис.1.26,б). В этих примерах

перемещение складывается из двух перемещений: корабля и человека, поперек реки и по течению реки.

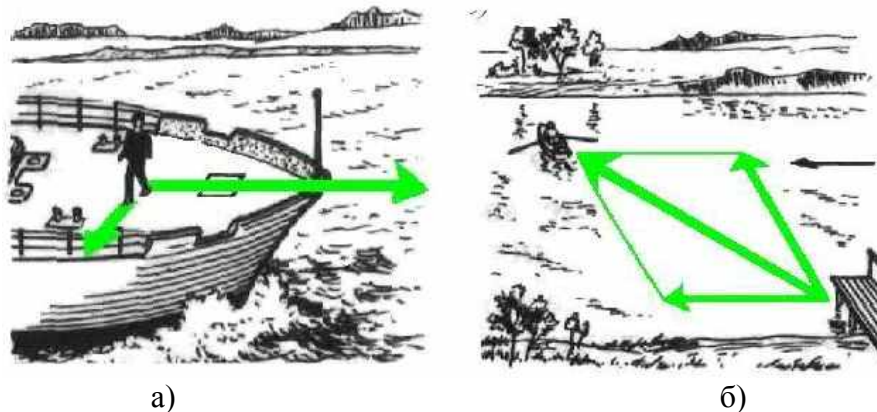


Рис.1.26

Каждое из этих слагаемых перемещений (за один и тот же промежуток времени) изобразим вектором, отложенным от точки  $A$ :  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$  (рис.1.27). Рассматриваем лишь случай, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Тогда суммарное перемещение изобразится диагональю  $\overrightarrow{AC}$  параллелограмма  $ABCD$ , построенного на векторах  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ .

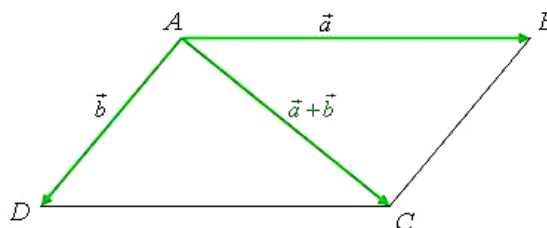


Рис.1.27

Убедимся, что вектор  $\overrightarrow{AC}$  будет суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , построенной по правилу треугольника. Действительно, так как  $ABCD$  – параллелограмм, то  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ . Поэтому  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \text{ т.е. } \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Мы доказали *правило параллелограмма*: **если векторы не коллинеарны, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.**

### Вопросы для самоконтроля

1. Как складываются два вектора по правилу треугольника?
2. В каких случаях удобно применять правило треугольника?
3. Как складываются два вектора по правилу параллелограмма?
4. Когда удобнее применять правило параллелограмма?

### Задачи

**Дополняем теорию. 5.1.** Докажите, что модуль суммы двух векторов не превосходит суммы модулей этих векторов. Выясните, когда имеет место равенство в этом нестрогом неравенстве? Обобщите этот результат на большее число слагаемых.

**Рисуем. 5.2.** Нарисуйте треугольник  $ABC$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; б)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ ; в)  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ ; г)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$ ; д)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ ; е)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$ .

**5.3.** Нарисуйте параллелограмм  $ABCD$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; б)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ ; в)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ ; г)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ ; д)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ ; е)  $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$ ; ж)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ ; з)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ ; и)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ;

к)  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ ; л)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ; м)  $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}$ . Представьте вектор  $\overrightarrow{BA}$  как сумму двух векторов, заданных вершинами параллелограмма.

**5.4.** Нарисуйте куб. Выберите любую пару его вершин и нарисуйте вектор, заданный эти вершинами. Нарисуйте еще один такой вектор, полученный таким же способом. Нарисуйте сумму этих векторов.

**Доказываем. 5.5.** Нарисуйте на плоскости четыре точки  $A, B, C, D$ . Докажите, что  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ . Составьте другие аналогичные равенства. Можно ли эти равенства перенести на точки, не лежащие в одной плоскости?

**5.6.** Точки  $A, B, C, D$  являются серединами последовательных сторон четырехугольника. Докажите, что  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ . Докажите это равенство для случая, когда данные точки являются серединами отрезков четырехзвенной замкнутой ломаной.

**Исследуем. 5.7.** Даны векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Может ли: а) их сумма быть перпендикулярной одному из данных векторов; обоим данным векторам; б) их сумма образовывать равные углы с каждым из данных векторов; в) длина их суммы быть равна длине одного из векторов; обоих векторов?

**Применяем геометрию. 5.8.** Самолет пролетел 200 км на юго-запад, а затем на 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки? Придумайте сами похожую задачу.

**1.6. Свойства сложения векторов.** У операции сложения векторов те же свойства, что и у операции сложения чисел.

**Свойство 1.** Для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (3)$$

(переместительный закон или коммутативность сложения).

**Доказательство.** Возможны два случая. 1) Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны. Тогда отложим их от точки  $A$ :  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ , а затем построим на них параллелограмм  $ABCD$  (рис.1.28). Поскольку  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ , то имеет место равенство (3).

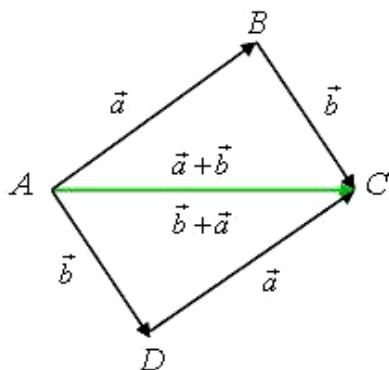


Рис.1.28

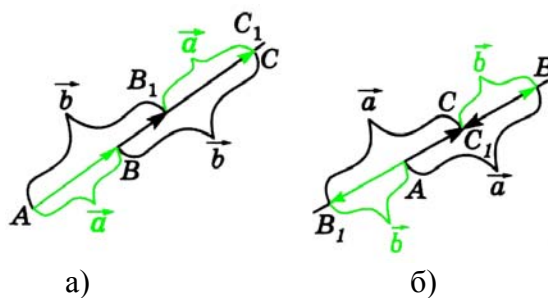


Рис.1.29

2) Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны. Тогда векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  лежат на одной прямой (рис.1.29). На той же прямой лежат векторы  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$  и  $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$ . Надо доказать, что точки  $C$  и  $C_1$  совпадают. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  сонаправлены, то это следует из сложения отрезков (рис.1.29,а). А если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  направлены противоположно, то из вычитания отрезков (рис.1.29,б). Подробное доказательство желающие могут завершить самостоятельно. ■

**Свойство 2.** Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}. \quad (4)$$

(сочетательный закон или ассоциативность сложения).

*Доказательство.* Отложим от точки  $A$  вектор  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , а затем вектор  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  и вектор  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$  (рис.1.30). Тогда  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$  и, с другой стороны,  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ , т.е. справедливо (4). ■

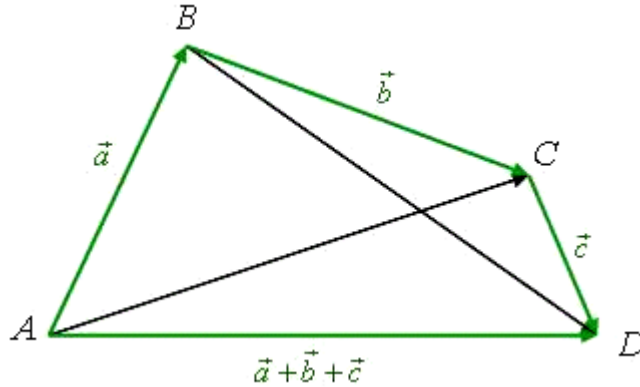


Рис.1.30

Пользуясь этим законом, можно группировать слагаемые при любом их числе, т.е. заключать в скобки любым образом. Поэтому суммы векторов пишут, никак не объединяя слагаемые скобками:  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$  и т.д.

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые (так же как и числа). Часто это значительно облегчает сложение при числе слагаемых, большем двух.

Чтобы сложить несколько векторов, например векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ , удобно построить векторную ломаную (рис.1.31). Эта ломаная состоит из направленных отрезков  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$ . Вектор  $\overrightarrow{AE}$ , идущий от начала ломаной  $ABCDE$  в ее конец, и является суммой:  $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ .

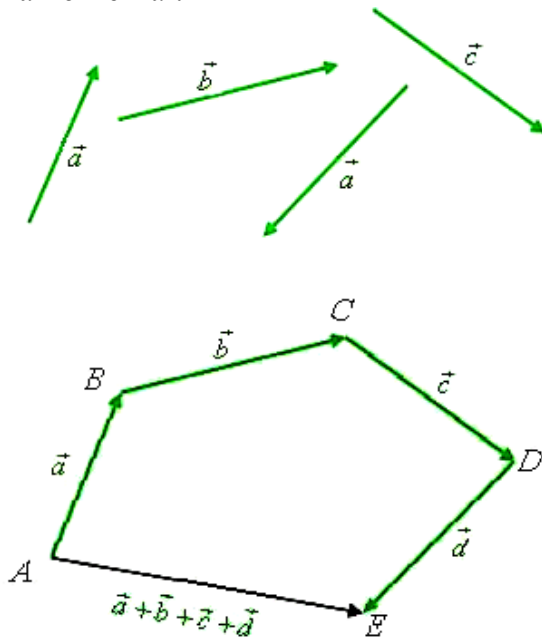


Рис.1.31

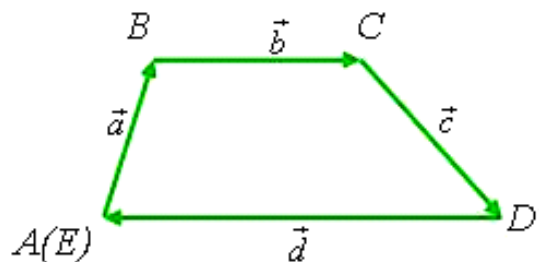


Рис.1.32

Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору (рис.1.32). Отметим еще очевидное *свойство нуль-вектора*:



**Свойство 3.**  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит переместительный закон сложения векторов? Как его еще называют?
2. В чем состоит сочетательный закон сложения векторов? Как его еще называют?
3. Как получить сумму векторной ломаной? Когда эта сумма равна нулю?

### Задачи

**Рисуем. 6.1.** Нарисуйте треугольник  $ABC$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ ; б)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ ; в)  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ ; г)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ .

**6.2.** Нарисуйте четырехугольник  $ABCD$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ ; б)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ; в)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ ; г)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$ ; д)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$ ; е)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$ ; ж)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ .

**6.3.** От одной точки отложены три вектора равной длины. Один из этих векторов равен сумме двух других. Нарисуйте эти векторы.

**Находим величину. 6.4.** Из одной точки выходят три вектора, длина каждого равна  $a$ . Они образуют между собой углы  $120^\circ$ . Чему равна длина их суммы? В какой известной басне А.И.Крылова описана аналогичная ситуация?

**6.5.** Дан единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чему равна длина вектора: а)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{A_1 C_1}$ ; б)  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{A_1 C_1}$ ; в)  $\overrightarrow{A_1 C_1} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D_1 A}$ ?

**1.7. Вычитание векторов. Противоположные векторы.** Как и вычитание чисел, вычитание векторов – это действие, обратное сложению. Поэтому **разностью**  $\vec{a} - \vec{b}$  двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , дающий в сумме с вектором  $\vec{b}$  вектор  $\vec{a}$ :  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ .

Разность двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно построить так. Отложим от какой-либо точки  $O$  векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Получим  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  (рис.1.33).

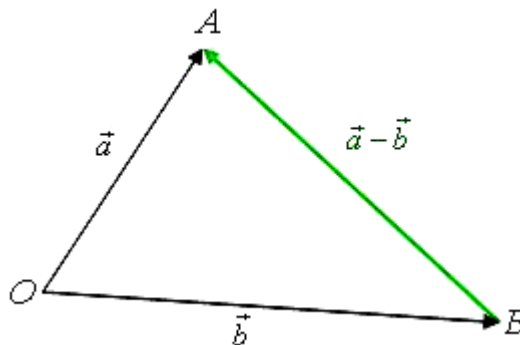


Рис.1.33

Тогда вектор  $\overrightarrow{BA}$  и будет разностью  $\vec{a} - \vec{b}$ , поскольку  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$ . Поэтому можно написать

$$\vec{c} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Вычитание можно свести к сложению, если ввести понятие противоположного вектора. Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они направлены противоположно (рис.1.34).

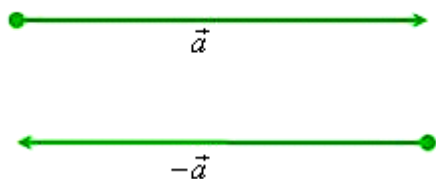


Рис.1.34

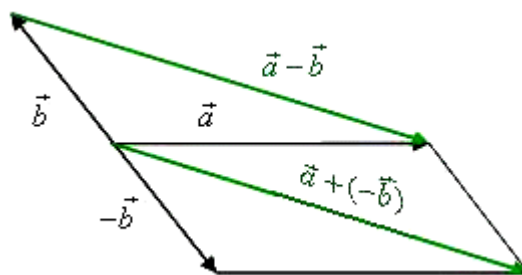


Рис.1.35

Каждый из них называется противоположным другому. Нуль-вектор считается противоположным самому себе.

Вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначается  $-\vec{a}$  (читается “минус  $a$ ”).

Как при сложении противоположных чисел получается нуль, так и **при сложении противоположных векторов в сумме получится нуль-вектор**.

Теперь мы можем утверждать, что *результат вычитания из вектора  $\vec{a}$  вектора  $\vec{b}$  тот же, что и результат сложения векторов  $\vec{a}$  и  $-\vec{b}$* .

Доказательство (для неколлинеарных векторов) ясно из рисунка 1.35.

### Вопросы для самоконтроля

1. Какой вектор называется разностью двух векторов?
2. Какие два вектора называются противоположными?
3. Какими способами можно получить разность двух векторов?

### Задачи

**Дополняем теорию. 7.1.** Докажите, что  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  для любой точки  $O$ .

**Рисуем. 7.2.** Нарисуйте треугольник  $ABC$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ; б)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ; в)  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$ ; г)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}$ ; д)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$ ; е)  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ .

**7.3.** Нарисуйте параллелограмм  $ABCD$ . Нарисуйте векторы: а)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ; б)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ; в)  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$ ; г)  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA}$ ; д)  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$ ; е)  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$ ; ж)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ .

**7.4.** Нарисуйте иллюстрации к таким векторным равенствам: а)  $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$ ; б)  $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$ ; в)  $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ ; г)  $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ .

**Представляем. 7.5.** Представьте себе параллелограмм  $ABCD$ . Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а)  $\overrightarrow{AD}$ ; б)  $\overrightarrow{DC}$ ?

**7.6.** Представьте себе тетраэдр  $ABCD$ . Разностью каких векторов, заданных его вершинами, является вектор: а)  $\overrightarrow{AD}$ ; б)  $\overrightarrow{DC}$ ?

**Находим величину. 7.7.** Дан единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чему равна длина вектора: а)  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ; б)  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$ ; в)  $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC_1}$ ; г)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA_1}$ ; д)  $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{D_1 C_1}$ ?

**Доказываем. 7.8.** Пусть  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Докажите, что для любой точки  $O$  верно равенство  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$ . Верно ли обратное утверждение?

**Исследуем. 7.9.** Вместе с двумя неколлинеарными векторами рассмотрим их сумму и разность. Может ли быть так, что: а) их разность перпендикулярна их сумме; б) их разность параллельна их сумме; в) равны модули их суммы и их разности; г) модуль разности больше модуля их суммы; д) один из данных векторов образует равные углы и с их суммой и с их разностью?

**1.8. Умножение вектора на число.** Если в сумме векторов одно и то же слагаемое повторяется несколько раз, например,  $\vec{a} + \vec{a}$ ,  $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ , и т.п., то, как и в алгебре, такие суммы естественно обозначать  $2\vec{a}$ ,  $3\vec{a}$  и т.д. (рис.1.36).

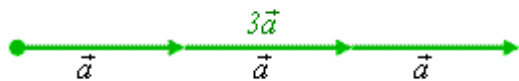


Рис.1.36



Рис.1.37

Если точка  $C$  - середина отрезка  $AB$ , то  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ ,  $\overline{AC} = \overline{CB}$ , а потому  $\overline{AB} = 2\overline{AC}$  и  $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB}$  (рис.1.37).

Уже эти простейшие примеры подсказывают, что удобно ввести операцию умножения вектора на число, и подсказывают, как дать соответствующее определение.

**О п р е д е л е н и е.** Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на отличное от нуля число  $x$  называется такое вектор  $x\vec{a}$  для которого выполняются два условия: 1) его длина равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  на модуль числа  $x$ , т.е. выполняется равенство

$$|x\vec{a}| = |x||\vec{a}|; \quad (5)$$

2) он сонаправлен с вектором  $\vec{a}$ , если  $x > 0$  (рис.1.38,а), и он направлен противоположно вектору  $\vec{a}$ , если  $x < 0$  (рис.1.38,б).

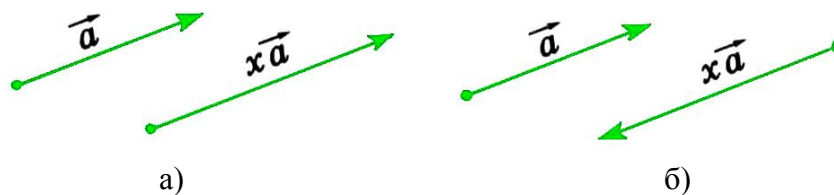


Рис.1.38

Если же  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $x=0$ , то вектор  $x\vec{a}$  - нулевой (что согласуется с равенством (5)).

Из данного определения непосредственно вытекают такие свойства операции умножения вектора на число:

1.  $1\vec{a} = \vec{a}$  для любого вектора  $\vec{a}$ .
2.  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$  для любого вектора  $\vec{a}$ .
3. Если  $x\vec{a} = \vec{0}$ , то либо  $x=0$ , либо  $\vec{a} = \vec{0}$ .
4. Если  $x\vec{a} = y\vec{a}$  и  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , то  $x=y$ .
5. Если  $x\vec{a} = x\vec{b}$  и  $x \neq 0$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ .
6.  $x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}$  для любого вектора  $\vec{a}$  и любых чисел  $x$  и  $y$ .

Доказывая эти векторные равенства, каждый раз следует проверять равенство модулей и сонаправленность векторов. Продемонстрируем это, например, для свойства 4. Из равенства  $x\vec{a} = y\vec{a}$  следует, что  $|x\vec{a}| = |y\vec{a}|$ . Согласно равенству (1) получаем, что  $|x||\vec{a}| = |y||\vec{a}|$ . Так как  $|\vec{a}| \neq 0$ , то  $|x| = |y|$ . Кроме того, числа  $x$  и  $y$  имеют один и тот же знак (в противном случае векторы  $x\vec{a}$  и  $y\vec{a}$  были бы направлены противоположно). Поэтому  $x=y$ .

Свойства 1- 3 очевидны. Свойства 5 и 6 доказываются так же, как свойство 4. Убедитесь в их справедливости самостоятельно.

Операция умножения векторов дает возможность сформулировать и доказать простой, но важный признак коллинеарности векторов.

**Теорема** (характерное свойство коллинеарности). Вектор  $\vec{b}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{a}$  тогда и только тогда, когда  $\vec{b} = x\vec{a}$ .

*Доказательство.* В этой теореме два утверждения 1) Если  $\vec{b} = x\vec{a}$ , то векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны. Это утверждение вытекает из определения умножения вектора на число.

2) Второе предложение обратно к первому и утверждает, что вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный ненулевому вектору  $\vec{a}$ , получается из вектора  $\vec{a}$  умножением его на некоторое число  $x$ . Если вектор  $\vec{b}$  - нулевой, то ясно, что  $x=0$ . Если вектор  $\vec{b}$  - ненулевой, то он либо сонаправлен с вектором  $\vec{a}$  (рис.1.39,а), либо направлен противоположно вектору  $\vec{a}$  (рис.1.39,б).

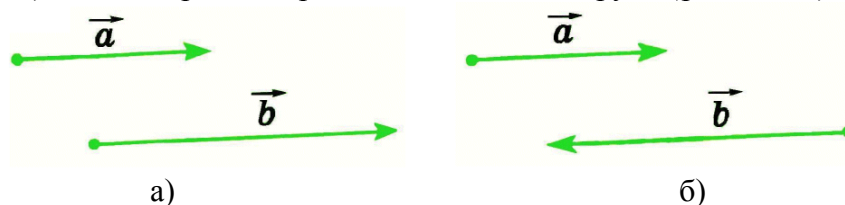


Рис.1.39

В первом случае  $x = |\vec{b}| : |\vec{a}|$ . Во втором случае  $x = -|\vec{b}| : |\vec{a}|$ . Проверьте самостоятельно равенство модулей и сонаправленность векторов  $\vec{b}$  и  $x\vec{a}$  для обоих случаев. ■

**С л е д с т в и е** (о векторах на прямой). Два вектора, отложенный из одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

Другими словами, точка  $X$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AB}$  (рис.1.40).



Рис.1.40

### Вопросы для самоконтроля

1. Как умножить ненулевой вектор на ненулевое число?
2. Какие свойства умножения вектора на число вы знаете?
3. В чем состоит характерное свойство коллинеарных векторов?

### Задачи

**Рисуем. 8.1.** Нарисуйте вектор  $\vec{a}$ . Нарисуйте векторы  $2\vec{a}$ ,  $-3\vec{a}$ ,  $\frac{1}{4}\vec{a}$ ,  $-\frac{1}{3}\vec{a}$ ,  $\frac{2}{3}\vec{a}$ .

**8.2.** Нарисуйте два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Нарисуйте затем векторы: а)  $2\vec{a} + 4\vec{b}$ ; б)  $-2\vec{a} + 4\vec{b}$ ; в)  $2\vec{a} - 4\vec{b}$ ; г)  $-2\vec{a} - 4\vec{b}$ .

**8.3.** Нарисуйте две точки  $A$  и  $B$ . Нарисуйте фигуру, которую образуют все точки  $X$  такие, что: а)  $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ , где  $0 \leq t \leq 1$ ; б)  $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{BA}$ , где  $0 \leq t \leq 1$ ; в)  $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ , где  $t \geq 0$ ; г)  $\overrightarrow{BX} = t\overrightarrow{AB}$ , где  $t \geq 0$ ; д)  $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ , где  $t \leq 0$ ; е)  $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ , где  $-1 \leq t \leq 1$ .

**8.4.** Нарисуйте два единичных взаимно перпендикулярных вектора  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ . Нарисуйте фигуру, которую образуют все точки  $K$  такие, что  $\overrightarrow{OK} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ , если: а)  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ; б)  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ; в)  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \geq 1$ . Что изменится в сделанном рисунке, если векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  не будут перпендикулярными?

**Находим величину. 8.5.** На отрезке  $AB$  длиной 20 см лежит точка  $C$ , причем  $AC = 15$  см. Выразите: а)  $\overrightarrow{AC}$  через  $\overrightarrow{AB}$ ; б)  $\overrightarrow{AB}$  через  $\overrightarrow{CB}$ ; в)  $\overrightarrow{BC}$  через  $\overrightarrow{AC}$ .

**8.6.** На отрезке  $AB$  взята такая точка  $X$ , что  $AX:XB=2:1$ . Выразите: а)  $\overrightarrow{AX}$  через  $\overrightarrow{AB}$ ; б)  $\overrightarrow{BX}$  через  $\overrightarrow{AX}$ ; в)  $\overrightarrow{AB}$  через  $\overrightarrow{BX}$ . Сможете ли вы решить задачу в общем случае, когда  $AX:XB=k$ ?

**8.7.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . Пусть  $O$  – точка пересечения его диагоналей. Обозначим  $\overrightarrow{AC}$  как  $\vec{a}$ , а  $\overrightarrow{BD}$  как  $\vec{b}$ . Выразите через  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  векторы: а)  $\overrightarrow{OA}$ ; б)  $\overrightarrow{CO}$ ; в)  $\overrightarrow{AB}$ ; г)  $\overrightarrow{BC}$ ; д)  $\overrightarrow{CD}$ ; е)  $\overrightarrow{DA}$ .

**8.8.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Пусть  $O$  – точка пересечения его диагоналей. Обозначим  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ . Выразите через эти векторы: а)  $\overrightarrow{CD}$ ; б)  $\overrightarrow{AD}$ ; в)  $\overrightarrow{AC_1}$ ; г)  $\overrightarrow{C_1 A}$ ; д)  $\overrightarrow{AB_1}$ .

**Ищем границы. 8.9.** Угол между единичными векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\varphi$ . В каких границах при изменении  $\varphi$  находится длина вектора: а)  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ; б)  $-2\vec{a} - \vec{b}$ ; в)  $x\vec{a} + y\vec{b}$ ?

**1.9. Распределительные законы умножения векторов на число.** Операции сложения векторов и умножения вектора на число связаны двумя распределительными законами.

**Первый закон.** Для любых чисел  $x$  и  $y$  и любого вектора  $\vec{a}$  выполняется равенство

$$(x+y) \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}. \quad (6)$$

В равенстве (6) стоят лишь векторы, лежащие на одной прямой. Поэтому доказательство равенства (6) сводится к сложению или вычитанию отрезков в зависимости от знаков чисел  $x$  и  $y$ . Мы не будем перебирать все возможные случаи и оставляем их для самостоятельного рассмотрения.

**Второй закон.** Для любого числа  $x$  и любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполняется равенство

$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}. \quad (7)$$

Для натуральных множителей  $x$  равенство (7) вытекает из переместительного и сочетательного свойств сложения. Например, при  $x=3$  имеем

$$3(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Аналогичное рассуждение проводится и для любого натурального  $x$ .

Очевидно, что (7) верно при  $x=-1$ , т.е.  $(-1)(\vec{a} + \vec{b}) = (-1)\vec{a} + (-1)\vec{b}$  (рис.1.41). Следовательно, (7) верно и при целом отрицательном  $x$ . Например,

$$(-3)(\vec{a} + \vec{b}) = (-1)(3(\vec{a} + \vec{b})) = (-1)(3\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1)3\vec{a} + (-1)3\vec{b} = (-3)\vec{a} + (-3)\vec{b}.$$

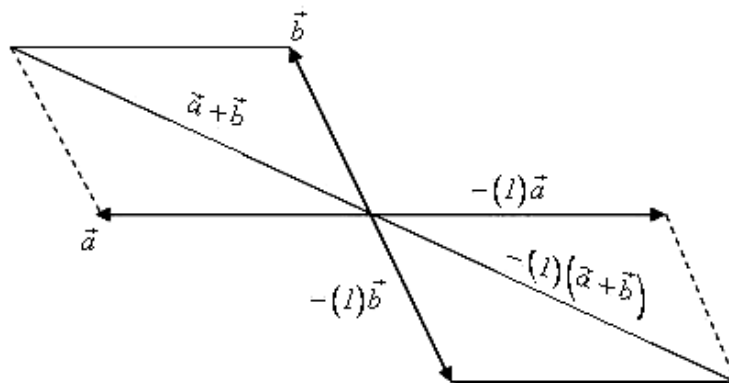


Рис.1.41

Рассмотрим теперь случай, когда  $x = \frac{1}{p}$ , где  $p$  – натуральное. Пусть, например,  $x = \frac{1}{2}$ , т.е.

$p=2$ . Положим  $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$  и  $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ . Тогда, как уже доказано,

$2\vec{d} = 2(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$ . Из равенства  $2\vec{c} = 2\vec{d}$  следует, что  $\vec{c} = \vec{d}$ , т.е. (7) верно для  $x = \frac{1}{2}$ .

Повторите это рассуждение для произвольного натурального  $p$ .

Из рассмотренных уже случаев следует, что (7) верно для любого рационального  $x = \frac{\kappa}{p}$

( $\kappa$  – целое, а  $p$  – натуральное). Действительно,

$$\frac{\kappa}{p}(\vec{a} + \vec{b}) = \kappa(\frac{1}{p}(\vec{a} + \vec{b})) = \kappa(\frac{1}{p}\vec{a} + \frac{1}{p}\vec{b}) = \frac{\kappa}{p}\vec{a} + \frac{\kappa}{p}\vec{b}.$$

Верно (2) и для иррациональных чисел  $x$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Какими законами связаны действия сложения векторов и умножения вектора на число?

2. Что общего и в чем различия в распределительных законах умножения вектора на число?

### Задачи

**Работаем с формулой. 9.1.** Упростите выражения: а)  $5(-3\vec{a})$ ; б)  $-2(4\vec{x})$ ; в)  $-3\vec{p} + 2\vec{p}$ ;

г)  $4\vec{b} - 2\vec{b}$ ; д)  $2\vec{a} - 2\vec{b}$ ; е)  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ ; ж)  $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})$ ; з)  $0,5(2\vec{a} - 4\vec{b}) - 2(3\vec{a} - 2\vec{b})$ ;

и)  $\vec{x} + 2\vec{y} - 3\vec{z} - (\vec{z} - \vec{x}) - 2(\vec{y} - 2\vec{z})$ .

**9.2.** Из данного равенства выразите каждый из векторов через другие: а)  $2\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{0}$ ;

б)  $2\vec{a} - 5(\vec{b} - 3\vec{a}) = \vec{0}$ ; в)  $\alpha\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ; г)  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ ; д)  $0,5\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{0}$ .

**Планируем. 9.3.** Отметьте любые три точки  $A, B, C$ . Как найти точку  $X$  такую, что:

а)  $\vec{XA} = \vec{XB} + \vec{XC}$ ; б)  $\vec{XA} = \vec{XB} - \vec{XC}$ ; в)  $\vec{XA} + \vec{XB} = \vec{AB}$ ; г)  $\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} = \vec{0}$ ;

д)  $\vec{XA} + \vec{XB} - \vec{XC} = \vec{0}$ .

**9.4.** Отметьте две точки  $A$  и  $B$ . Как найти точку  $X$  такую, что: а)  $\vec{XA} = 3\vec{XB}$ ;

б)  $\vec{BX} = -2\vec{AX}$ ; в)  $\vec{XA} + 2\vec{XB} = 3\vec{AB}$ .

**Находим величину. 9.5.** а) Точки  $C$  и  $D$  делят на три равные части отрезок  $AB$ , а точка  $O$

- любая точка плоскости. Выразите векторы  $\vec{OC}$  и  $\vec{OD}$  через векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . б) Точка  $C$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $p : q$ , а точка  $O$  - любая точка плоскости. Выразите вектор  $\vec{OC}$  через векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ ; в)\* Выразите вектор, заданный биссектрисой треугольника через векторы, заданные его сторонами, выходящими из той же вершины.

**Доказываем. 9.6.** а) Точка  $C$  - середина отрезка  $AB$ , а точка  $O$  - любая точка плоскости.

Докажите, что  $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ . б) Точка  $M$  - точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ , а

точка  $O$  - любая точка пространства. Докажите, что  $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ .

**9.7.** Докажите, что сумма векторов, идущих из произвольной точки в середины всех сторон треугольника, равна сумме векторов, идущих из этой же точки в его вершины. Можно ли обобщить это утверждение?



**Исследуем. 9.8.** Пусть  $AB$  и  $CD$  - два отрезка, точка  $K$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $p:q$ , считая от точки  $A$ , точка  $M$  делит отрезок  $CD$  в том же отношении, считая от точки  $C$ . Выразите  $\overrightarrow{KM}$  через  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ . Будет ли верно полученное равенство, если данные отрезки не лежат в одной плоскости? Какие следствия вы можете получить из этого равенства?

**1.10. Векторная алгебра и векторный метод.** Операции сложения векторов и умножения вектора на число называют *линейными операциями* с векторами. Они составляют основу *векторной алгебры* – раздела математики, изучающего действия с векторами. Аппарат векторной алгебры удобен при решении задач геометрии и физики, техники и экономики.

Проиллюстрируем векторный метод для доказательства теоремы о средней линии треугольника. Напомним, что **средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины сторон треугольника (рис.1.42).

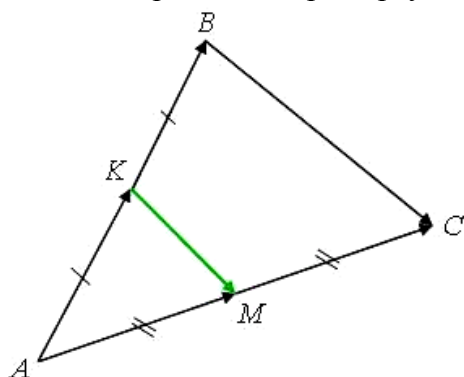


Рис.1.42

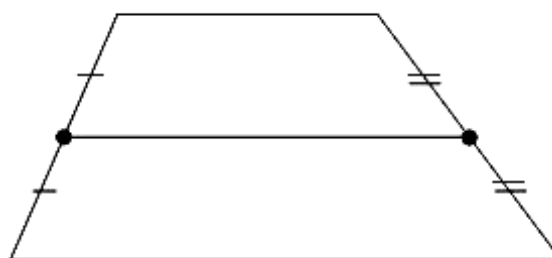


Рис.1.43

**Теорема (о средней линии треугольника).** *Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.*

*Доказательство.* Применяя векторный метод, сначала надо записать в векторной форме условие теоремы (или задачи).

Пусть точка  $K$  – середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , точка  $M$  – середина стороны  $AC$  и  $KM$  – средняя линия треугольника  $ABC$  (рис.1.42). Тогда  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . Мы записали в векторной форме условие теоремы. Переходим к ее доказательству.

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Итак, мы получили векторное равенство  $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ . Осталось его истолковать.

Во-первых, из этого равенства следует, что векторы  $\overrightarrow{KM}$  и  $\overrightarrow{BC}$  коллинеарны: *средняя линия треугольника параллельна его стороне.*

Во-вторых, из этого равенства ясно, что *средняя линия  $KM$  равна половине стороны  $BC$ .* Мы доказали оба утверждения теоремы о средней линии треугольника. ■

Из проведенного доказательства видно, что решение задач векторным методом в чем-то аналогично алгебраическому решению текстовых задач и состоит из трех этапов.

**Первый этап:** условие задачи надо записать в векторном виде, вводя подходящим образом векторы (аналогия – введение неизвестных и составление алгебраического уравнения).

**Второй этап:** средствами векторной алгебры условие задачи преобразуется так, чтобы получить решение задачи в векторном виде (аналогия – решение алгебраического уравнения).

**Третий этап:** полученное векторное соотношение истолковывается в исходных терминах (аналогия – формулировка ответа, после того, как алгебраическое уравнение решено).

Докажите самостоятельно теорему о средней линии трапеции векторным методом. Напомним, что **средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (рис.1.43).

**Теорема (о средней линии трапеции).** *Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.*

### Вопросы для самоконтроля

1. Какие операции называют линейными операциями с векторами?
2. На какие этапы разбивается решение задачи (или доказательство теоремы) векторным методом?

### Задачи

**Рассуждаем. 10.1.** Как записать на векторном языке о точках  $A$  и  $B$ , что они: а) совпадают; б) различны?

**10.2.** Как записать на векторном языке, что точка  $X$  лежит на: а) прямой  $AB$ ; б) луче  $AB$ ; в) отрезке  $AB$ ? А как записать, что она не принадлежит этим фигурам?

**10.3.** Как записать на векторном языке о точке  $X$  и отрезке  $AB$ : а)  $X$  - середина  $AB$ ; б)  $X$  делит его в отношении  $1:2$ ; в)  $X$  делит его в отношении  $p:q$ , считая от точки  $A$ .

**10.4.** Как записать на векторном языке, что: а) точки  $A, B, C$  являются вершинами треугольника; б) точки  $A, B, C, D$  являются вершинами параллелограмма?

**10.5.** Как записать на векторном языке, что прямые  $AB$  и  $CK$ : а) совпадают; б) параллельны?

**10.6.** Как записать на векторном языке об отрезках  $AB$  и  $CK$ , что: а)  $AB=CK$ ; б)  $AB=2CK$ ?

**Доказываем. 10.7.** Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Обобщите это утверждение.

**10.8.** Докажите, что точка пересечения средних линий четырехугольника лежит на прямой, соединяющей середины его диагоналей. Как выглядит обобщение этого результата в пространстве?

**10.9.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть точка  $K$  лежит на стороне  $AB$ , а точка  $M$  - на стороне  $AC$ . Пусть  $AK:AB=AM:AC$ . а) Докажите, что  $KM \parallel BC$ . б) Вычислите  $KM:BC$ . в) Изменятся ли полученные результаты, если точки  $K$  и  $M$  взять не на сторонах, а на их продолжениях как за точки  $B$  и  $C$ , так и за точку  $A$ ? г) Сформулируйте аналогичную задачу для трапеции.

**Участвуем в олимпиаде. 10.10.** Как, используя векторы, построить треугольник, зная середины его сторон? А пятиугольник? А четырехугольник?

### Тема: Метод координат

#### Содержание темы

- 1.11. Векторы на координатной оси.
- 1.12. Векторы на координатной плоскости.
- 1.13. Действия с векторами в координатной форме.
- 1.14. Скалярное умножение векторов.
- 1.15. Координаты векторов в пространстве.
- 1.16. Координатный метод.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число были определены нами чисто геометрически. Но выполнять операции с векторами геометрически не всегда удобно. Например, если надо сложить двадцать векторов, да еще умноженных на некоторые числа. Оказывается, что действия с векторами можно свести к действиям с числами. Но для этого

надо сначала ввести систему координат (на прямой, на плоскости или в пространстве) и тогда действия с векторами просто сводятся к аналогичным действиям с числами.

**1.11. Векторы на координатной оси.** Сначала рассмотрим векторы, лежащие на некоторой прямой  $p$ . Введем на этой прямой координату  $x$ , выбрав начало координат - точку  $O$  и единичный вектор  $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ . Прямая  $p$  стала координатной осью  $x$  (рис.1.44). Любой вектор  $\vec{a}$ , лежащий на прямой  $p$  коллинеарен единичному вектору  $\vec{i}$ . Согласно характерному свойству коллинеарных векторов (теорема п.1.8)

$$\vec{a} = a_x \vec{i}. \quad (8)$$

Число  $a_x$  называется **координатой вектора  $\vec{a}$  на координатной оси  $x$** . Оно определяется для каждого вектора на оси  $x$  единственным образом.

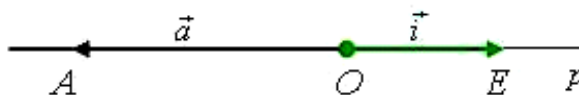


Рис.1.44

□ Действительно, пусть  $\vec{a} = a_x \vec{i}$  и  $\vec{a} = a_x^* \vec{i}$ . Тогда из равенства  $a_x \vec{i} = a_x^* \vec{i}$  следует, что  $a_x = a_x^*$  (по свойству 4 п.8). Поэтому два вектора на оси равны тогда и только тогда, когда их координаты равны. ■

Теперь легко установить следующие два свойства координат векторов на прямой:

**Свойство 1. При сложении векторов на оси их координаты складываются.**

□ Покажем, что если  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{c} = c_x \vec{i}$ ,  $\vec{a} = a_x \vec{i}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i}$ , то  $c_x = a_x + b_x$ .

Действительно,  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + b_x \vec{i} = (a_x + b_x) \vec{i}$  и  $\vec{c} = c_x \vec{i}$ . Из равенства  $(a_x + b_x) \vec{i} = c_x \vec{i}$  по свойству 4 п.8 имеем:  $c_x = a_x + b_x$ . ■

**Свойство 2. При умножении вектора на число его координата умножается на это число.**

Это свойство докажете самостоятельно.

Свойства 1 и 2 сводят действия с векторами на оси к действиям с их координатами.

Когда вектор  $\vec{a}$  отложен на оси  $x$  от начала координат (рис.1.45), т.е.  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ , то его координата  $a_x$  равна координате точки  $A$  - числу  $x_A$ :

$$a_x = x_A. \quad (9)$$

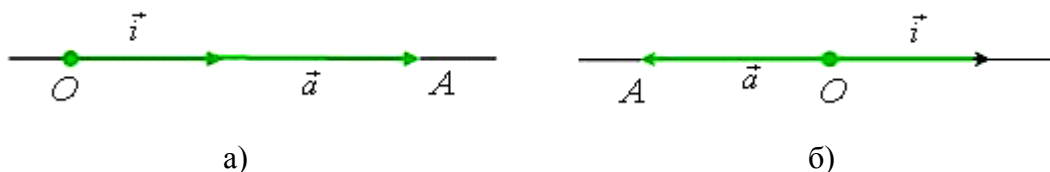


Рис.1.45

□ Действительно, модули этих чисел равны длине отрезка  $OA$ . Оба эти числа положительны, когда точка  $A$  лежит на положительной полуоси  $x$  (рис.1.45,а) - в этом случае векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\vec{i}$  сонаправлены. Если же точка  $A$  лежит на отрицательной полуоси  $x$  (рис.1.45,б), то оба они отрицательны - векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\vec{i}$  направлены противоположно. Следовательно, числа  $a_x$  и  $x_A$  равны. ■

Теперь уже легко найти координату вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  на оси  $x$ , если известны координаты  $x_A$  и  $x_B$  точек  $A$  и  $B$ . Поскольку  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i}$ , а  $\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i}$ , то  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i}$ . Последнее равенство и говорит о том, что **координата вектора на оси равна разности координат его начала и конца**:

$$a_x = x_B - x_A.$$

(10)

### Вопросы для самоконтроля

1. Как вводится координата вектора на оси?
2. Чему равна координата вектора на оси, координаты начала и конца которого известны?
3. Чему равна координата суммы векторов?
4. Что происходит с координатой вектора при умножении его на некоторое число?

### Задачи

**Представляем. 11.1.** Верно ли, что чем длиннее вектор, лежащий на оси, тем больше его координата? Верно ли обратное?

**Вычисляем. 11.2.** Вектор  $\vec{a}$  имеет координату  $-5$ , вектор  $\vec{b}$  имеет координату  $2$ . Каковы координаты векторов: а)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; б)  $-\vec{a} + \vec{b}$ ; в)  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ?

**11.3.** На оси лежат четыре вектора. Их координаты соответственно  $3, -2, -8, 7$ . Какой вектор является их суммой?

**11.4.** Даны две точки на оси:  $A(-10)$  и  $B(20)$ . Каковы координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$ ?

**11.5.** Даны две точки на оси:  $A(100)$  и  $B(-20)$ . Какую координату имеет точка  $X$ , такая, что: а)  $\overrightarrow{XA} = 2\overrightarrow{XB}$ ; б)  $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = \vec{0}$ ; в)  $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = \vec{0}$ ; г)  $2\overrightarrow{AX} - 3\overrightarrow{XB} = \vec{0}$ ?

**Исследуем. 11.6.** Даны точки на оси:  $A(-3), B(-1), C(4)$  и  $D(6)$ . Есть ли среди векторов, заданных этими точками, равные?

**11.7.** Как изменятся координаты векторов на координатной оси, если ее единичный вектор изменил направление?

**1.12. Векторы на координатной плоскости.** Обратимся теперь к векторам, лежащим на координатной плоскости  $xOy$ . Единичный вектор оси  $x$  обозначим через  $\vec{i}$ , а координатный вектор оси  $y$  обозначим через  $\vec{j}$ . Возьмем произвольный вектор  $\vec{a}$  и отложим его от начала координат:  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ . Сначала рассмотрим общий случай, когда вектор  $\vec{a}$  не коллинеарен координатным векторам (рис.1.46).

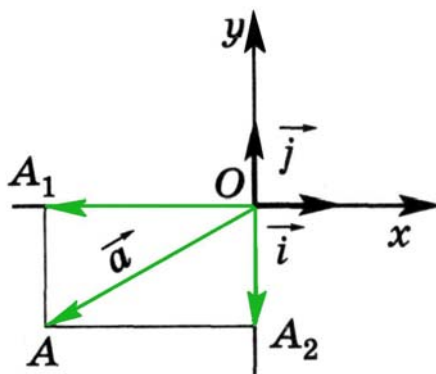


Рис.1.46

В этом случае точка  $A$  не лежит на координатных осях. Опустим из точки  $A$  перпендикуляры  $AA_1$  на ось  $x$  и  $AA_2$  на ось  $y$ . Получим прямоугольник  $OA_1AA_2$ . По правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \quad (11)$$

Мы разложили вектор  $\vec{a}$  по координатным осям:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \quad (12)$$

Векторы  $\overrightarrow{OA_1}$  и  $\overrightarrow{OA_2}$  называются **составляющими вектора  $\vec{a}$**  по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Каждая из этих составляющих имеет свою координату на соответствующей оси. Эти координаты обозначаем  $a_x$  и  $a_y$ . Поскольку  $\overrightarrow{OA_1} = a_x \vec{i}$  и  $\overrightarrow{OA_2} = a_y \vec{j}$ , то, подставляя эти равенства в формулу (12), получаем представление вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (13)$$

В пункте 1.11 показано, что число  $a_x$  – это координата точки  $A_1$  на оси  $x$ . Аналогично, число  $a_y$  – координата точки  $A_2$  на оси  $y$ . Следовательно, пара чисел  $(a_x, a_y)$  – это координаты точки  $A$ .

Ясно, что если вектор  $\vec{a}$  коллинеарен вектору  $\vec{i}$ , то точка  $A$  лежит на оси  $x$ ,  $\vec{a} = a_x \vec{i}$  и  $a_y = 0$  (рис.1.47,а). Аналогично, если вектор  $\vec{a}$  коллинеарен вектору  $\vec{j}$ , то  $a_x = 0$  и  $\vec{a} = a_y \vec{j}$  (рис.1.47,б). Равенство (13) установлено для всех случаев.

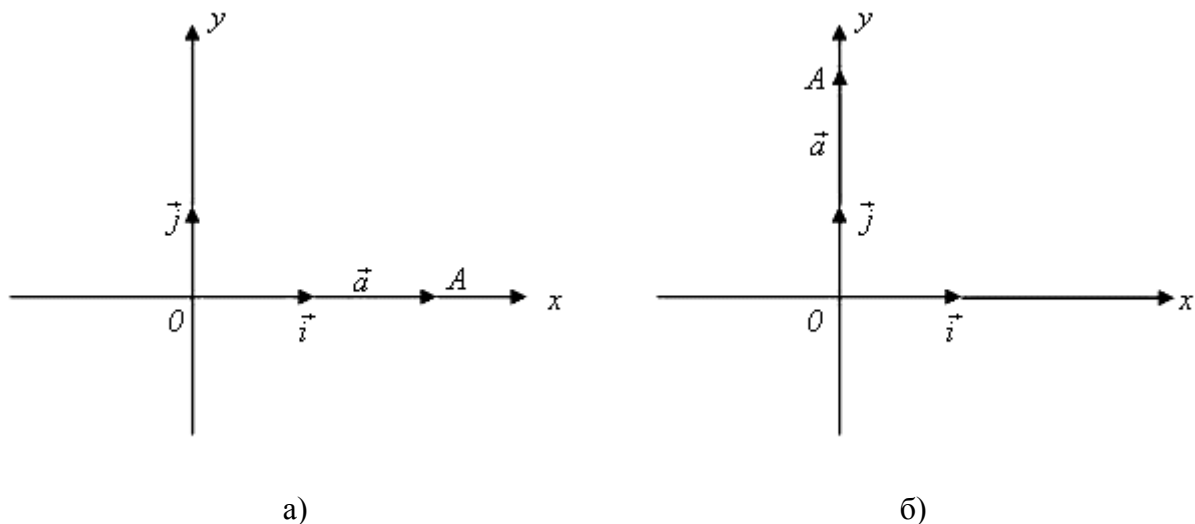


Рис.1.47

Полученная пара чисел  $(a_x, a_y)$  называется **координатами вектора**  $\vec{a}$  в заданной системе координат. Она же является координатами точки  $A$  – конца вектора  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

Последнее утверждение позволяет по каждой упорядоченной паре чисел  $(a_x, a_y)$  построить вектор  $\vec{a}$ , координатами которого в заданной системе прямоугольных координат  $xOy$  будут числа  $a_x, a_y$ . Для этого достаточно в этой системе координат построить точку  $A$  с координатами  $a_x, a_y$  и взять вектор  $\overrightarrow{OA}$ . Его координатами и будут числа  $a_x, a_y$ .

В заданной системе координаты вектора определяются единственным образом.

□ Действительно, допустим, что вектор  $\vec{a}$ , кроме равенства (13) может быть представлен равенством

$$\vec{a} = a_x^* \vec{i} + a_y^* \vec{j}. \quad (14)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что  $a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = a_x^* \vec{i} + a_y^* \vec{j}$ , а потому

$$(a_x - a_x^*) \vec{i} = (a_y^* - a_y) \vec{j}. \quad (15)$$

Один и тот же вектор, стоящий в левой и правой частях равенства (15) коллинеарен одновременно и вектору  $\vec{i}$ , и вектору  $\vec{j}$ . Коллинеарным одновременно двум единичным взаимно перпендикулярным векторам может быть лишь нулевой вектор. Поэтому и слева, и справа в равенстве (15) стоит нулевой вектор, т.е.  $a_x^* = a_x$  и  $a_y^* = a_y$ . Единственность координатного представления вектора доказана. ■

Проведенные рассуждения подытожим в виде следующей теоремы:

**Теорема (о координатах вектора на плоскости).** Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат с единичными векторами  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  координатных осей  $x$  и  $y$ . Тогда любой вектор  $\vec{a}$  плоскости  $xOy$  может быть представлен в виде  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ,

**и притом единственным образом. Если вектор  $\vec{a}$  отложен от начала координат, то его координаты равны соответственно координатам его конца.**

Еще раз вернемся к рисунку 1.46. Из теоремы Пифагора следует, что  $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2$ . Поскольку  $OA = |\vec{a}|$ ,  $OA_1 = |a_x|$  и  $OA_2 = |a_y|$ , то

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2, \quad (16)$$

т.е. **квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его координат.**

Как найти координатное разложение вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , если известны координаты начала и конца этого вектора:  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  (рис.1.48)?

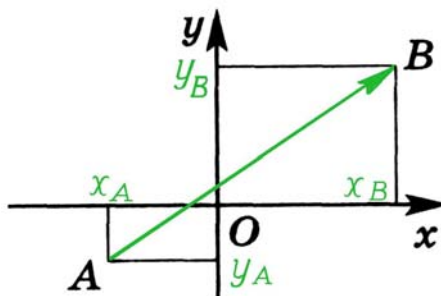


Рис.1.48

По определению координаты вектора равны коэффициентам при векторах  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  в равенстве (13). Так как

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j},$$

то координата составляющей на оси  $x$  - число  $a_x = x_B - x_A$ , а координата составляющей на оси  $y$  - число  $a_y = y_B - y_A$ .

Итак, чтобы найти координаты вектора нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора:

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A. \quad (17)$$

Поскольку каждому вектору на координатной плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел - его координаты, а каждой упорядоченной паре чисел соответствует вектор, для которого эта пара чисел является его координатами, то появляются основания для того, чтобы отождествить вектор  $\vec{a}$  с парой его координат  $(a_x, a_y)$  и писать  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ , имея в виду, что  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ .

Равенства (16) и (17) дают еще одну формулу для вычисления квадрата модуля вектора  $\overrightarrow{AB}$ , координаты начала и конца которого известны:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \quad (18)$$

Так как модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$  - это расстояние между точками  $A$  и  $B$ , то формула (8) является также *формулой для квадрата расстояния между двумя точками*  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  и может быть записана так:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \quad (19)$$

Координаты вектора на координатной плоскости получаются в результате проектирования его начала и конца на оси координат. Поэтому координаты вектора называют также его *проекциями*. Термин «проекция» употребляется и тогда, когда проектирование начала и конца вектора происходит только на одну ось (рис.1.49), причем необязательно в системе координат, - так обычно поступают в физике.



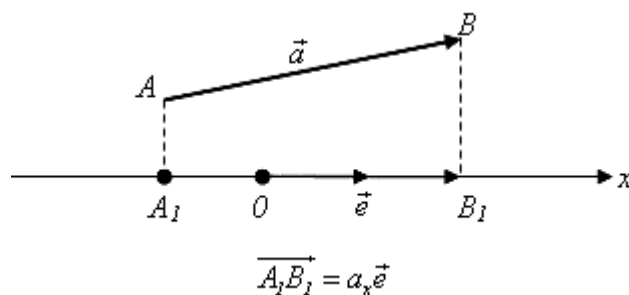


Рис.1.49

### Вопросы для самоконтроля

1. Как разложить вектор по координатным осям?
2. Что такое координаты вектора в данной системе координат?.
3. Как вычислить модуль вектора через его координаты?
4. Как выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца?
5. Как найти расстояние между точками, координаты которых известны?

### Задачи

**Дополняем теорию. 12.1.** Докажите, что проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.

**12.2.** Пусть  $\vec{a}$  — единичный вектор,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы, которые он составляет с осями координат. Докажите, что: а)  $\vec{a} = \cos\varphi_1 \vec{i} + \cos\varphi_2 \vec{j}$ ; б)  $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 = 1$ .

**Рисуем. 12.3.** Нарисуйте систему координат. Нарисуйте такой вектор, что: а) обе его координаты положительны; б) обе его координаты отрицательны; в) одна из координат положительна, а другая отрицательна; г) одна из координат равна нулю.

**12.4.** Нарисуйте вектор  $\overrightarrow{OA}$ , координаты которого: а) (2, 2); б) (3, 0); в) (-2, -4); г) (0, -3); д) (3, -2). Нарисуйте векторы с теми же координатами и с началом в точке B, координаты которой (-2, -1).

**12.5.** Нарисуйте ось. Нарисуйте вектор, проекция которого на эту ось равна: а) 2; б) -2; в) 0.

**Вычисляем. 12.6.** Каковы координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  и его длина, если: а) A(0, 2) и B(-1, 3); б) A(2, 3) и B(-1, -1); в) A(-2, -3) и B(1, 1); г) A(p, q) и B(-p, -q)?

**12.7.** Какой угол образует вектор с осями координат, если его координаты равны: а) (1, 1); б) (1, -1); в) (-1, 1); г) (-1, -1); д) (1,  $\sqrt{3}$ ); е) (- $\sqrt{3}$ , -1); ж) (2, 3)?

**12.8.** От точки A(2, -3) отложили вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ . Каковы координаты точки B, если: а)  $\vec{a} = (1, 2)$ ; б)  $\vec{a} = (-1, 2)$ ; в)  $\vec{a} = (1, -2)$ ; г)  $\vec{a} = (10, -5)$ ; д)  $\vec{a} = (-3, -1)$ ?

**12.9.** От точки A отложили вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ . Известно, что точка B имеет координаты (2, 3). Каковы координаты точки A, если: а)  $\vec{a} = (1, 2)$ ; б)  $\vec{a} = (-1, 2)$ ; в)  $\vec{a} = (1, -2)$ ; г)  $\vec{a} = (10, -5)$ ; д)  $\vec{a} = (-3, -1)$ ?

**Ищем границы. 12.10.** Длина вектора равна 5. Одна из его координат возрастает от 2 до 4. Как изменяется другая его координата?

**12.11.** Одна из координат вектора изменяется от 1 до 2, а другая — от -3 до 1. В каких границах лежит длина вектора?

**Исследуем. 12.12.** Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе координаты?

**1.13. Действия с векторами в координатной форме.** Как и координата вектора на прямой, координаты вектора на плоскости обладают следующими свойствами:

**Свойство 1.** При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.

□ Пусть  $\vec{a} = (a_x, a_y)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  и  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Покажем, что  $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$ ,

т.е.

$$c_x = a_x + b_x \text{ и } c_y = a_y + b_y. \quad (20)$$

Действительно,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}. \quad (21)$$

Из равенства (21) и единственности координатного представления вектора вытекают равенства (20). ■

**С в о й с т в о 2.** При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

□ Пусть  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  и  $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ . Покажем, что  $\vec{b} = (\alpha a_x, \alpha a_y)$ ,

т.е.

$$b_x = \alpha a_x \text{ и } b_y = \alpha a_y. \quad (22)$$

Действительно,  $\vec{b} = \alpha a_x \vec{i} + \alpha a_y \vec{j}$ , т.е. выполняются равенства (22). ■

Свойство 2 позволяет по-другому сформулировать признак коллинеарности векторов (теорему пункта 5): два вектора  $\vec{a} = (a_x, a_y)$  и  $\vec{b} = (b_x, b_y)$  коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е. выполняются равенства (22).

Это утверждение докажете самостоятельно.

### Вопросы для самоконтроля

1. Чему равны координаты суммы векторов, если координаты слагаемых известны?
2. Что происходит с координатами вектора при умножении его на число?

### Задачи

**Дополняем теорию. 13.1.** Дан вектор  $\vec{a} = (x, y)$ . Каковы координаты вектора  $-\vec{a}$ ?

**13.2.** Каковы координаты вектора  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ? Дайте словесную формулировку этому свойству координат. Каковы координаты вектора  $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ ?

**Вычисляем. 13.3.** Дан вектор  $\vec{a} = (2, -1)$ . Запишите координаты вектора: а)  $-\vec{a}$ ; б)  $2\vec{a}$ ; в)  $-\vec{a}$ .

**13.4.** Даны векторы  $\vec{a} = (-2, 2)$  и  $\vec{b} = (2, -2)$ . Найдите координаты векторов: а)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; б)  $\vec{a} - \vec{b}$ ; в)  $-\vec{a} - \vec{b}$ ; г)  $-\vec{a} + \vec{b}$ ; д)  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; е)  $\frac{1}{2} \vec{a} - 2\vec{b}$ .

**13.5.** Пусть вектор  $\vec{a}$  длины 2 образует с осью  $x$  угол  $30^\circ$  и тупой угол с осью  $y$ , а вектор  $\vec{b}$  длиной 4 образует с осью  $x$  угол  $120^\circ$  и острый угол с осью  $y$ . Каковы координаты векторов: а)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; б)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; в)  $\vec{a} - 2\vec{b}$ ?

**13.6.** Коллинеарны ли векторы: а)  $(4, -2)$  и  $(2, 1)$ ; б)  $(4, -2)$  и  $(-2, 1)$ ; в)  $(4, -2)$  и  $(4, 0)$ ; г)  $(-4, 2)$  и  $(2, -1)$ ; д)  $(3, 0)$  и  $(-5, 0)$ ; е)  $(3, 0)$  и  $(0, 3)$ ?

**13.7.** Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - коллинеарны. Найдите их недостающие координаты:

а)  $\vec{a} = (-2, 1)$ ,  $\vec{b} = (\dots, 3)$ ; б)  $\vec{a} = (2, -1)$ ,  $\vec{b} = (4, \dots)$ ; в)  $\vec{a} = (0, 3)$ ,  $\vec{b} = (\dots, y)$ ; г)  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{b} = (x, \dots)$ .

**13.8.** Заданы точки  $A(2, -3)$ ,  $B(-1, -1)$ ,  $C(4, -2)$ ,  $P(3, 3)$ . Вычислите координаты векторов: а)  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ; б)  $\vec{AB} - \vec{CB}$ ; в)  $2\vec{AC} - 3\vec{BC}$ ; г)  $\vec{PA} + \frac{1}{3} \vec{BC} + 2\vec{AB}$ .

**1.14. Скалярное умножение векторов.** Изучим еще одну операцию с векторами. Эта операция возникает, в частности, при решении такой важной физической задачи, как задача о механической работе  $A$ , совершаемой силой  $\vec{f}$  при перемещении  $\vec{s}$  некоторого тела (рис.1.50).

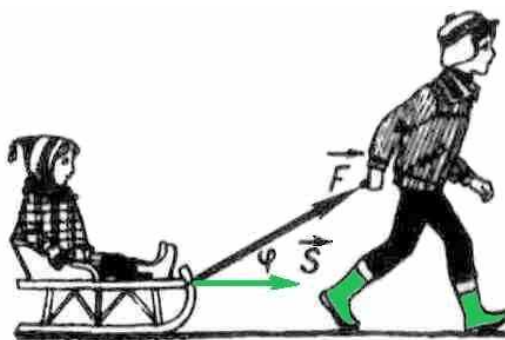


Рис.1.50

Известно, что работа  $A$  вычисляется по формуле

$$A = |\vec{f}| |\vec{s}| \cos \varphi, \quad (23)$$

где  $\varphi$  - угол между векторами  $\vec{f}$  и  $\vec{s}$ . Число  $|\vec{f}| |\vec{s}| \cos \varphi$  называется скалярным произведением этих векторов.

Итак, **скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их модулей и косинуса угла между ними** (рис.1.51).

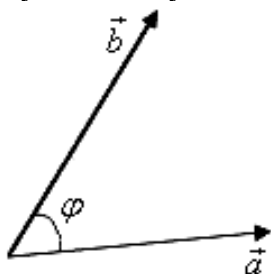


Рис.1.51

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обычно обозначают  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Таким образом, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (24)$$

где  $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$ .

**Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  - нулевой, то полагают  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .**

Отметим два важных частных случая.

1)  $\vec{a} = \vec{b}$ . Если вектор  $\vec{a}$  - ненулевой, то угол  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\cos \varphi = 1$  и из (23) следует, что  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . Произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  обозначается  $\vec{a}^2$  и называется **скалярным квадратом вектора  $\vec{a}$** . Итак,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ .

2) Для ненулевых векторов их скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - взаимно перпендикулярны. Действительно, из равенства (24) следует, что  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\cos \varphi = 0$ , т.е. тогда и только тогда, когда  $\varphi = 90^\circ$ .

Операция скалярного умножения векторов позволят находить длины векторов по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (25)$$

и угол между векторами, выражая  $\cos \varphi$  из равенства (24).

Выразим скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  через их координаты. Пусть  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ . Отложим эти векторы от начала координат:  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Если векторы  $\vec{a}$  и

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны, то получим треугольник  $OAB$ , угол  $\varphi$  которого при вершине  $O$  равен углу между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис.1.52).

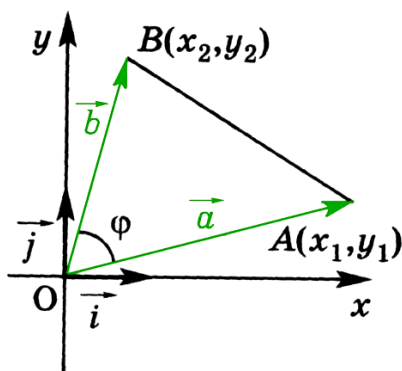


Рис.1.52

По теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \varphi. \quad (26)$$

Произведение  $OA \cdot OB \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$ . Выразим  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  из равенства (26). Получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2). \quad (27)$$

Согласно формуле (19) из п.1.12 для расстояния между точками, имеем

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad OB^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (28)$$

Подставив равенства (28) в (27), получим выражение скалярного произведения двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  через их координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (29)$$

Проверьте самостоятельно, что для коллинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т.е. в случае когда  $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ , формула (29) тоже справедлива.

Словами: *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.*

Из формулы (29) вытекают такие *свойства скалярного умножения*:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2)  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$  для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и любого числа  $\alpha$ ;
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

Проверим, например, свойство 3. Положим  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  и  $\vec{c} = (x_3, y_3)$ . Тогда  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  и  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 = x_1 x_3 + x_2 x_3 + y_1 y_3 + y_2 y_3$ .

Но и  $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1 x_3 + y_1 y_3 + x_2 x_3 + y_2 y_3$ . Поэтому  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ . ■

Доказанные свойства скалярного умножения вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы и разности векторов по правилам обычной алгебры. Например,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Что называется скалярным произведением двух ненулевых векторов?
2. Когда скалярное произведение равно нулю?

3. Как выражается скалярное произведение векторов через их координаты?  
 4. Какие свойства имеет скалярное умножение? В чем оно похоже на умножение чисел?  
 А в чем разница?  
 5. В какой теореме о треугольнике присутствует скалярное произведение?  
 6. Как зависит знак скалярного произведения от угла между векторами?  
 7. Чему равно скалярное произведение единичных векторов?

### Задачи

**Дополняем теорию. 14.1.** Докажите, что проекция вектора на ось равна скалярному произведению этого вектора и единичного вектора оси.

**14.2.** Докажите, что: а)  $\vec{a} \cdot (x\vec{b}) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ; б)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

**Работаем с формулой. 14.3.** Упростите: а)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ; б)  $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$ .

**14.4.** Преобразуйте выражения: а)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$ ; б)  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ ; в)  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ ; г)  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ ; д)  $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ; е)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ .

**Вычисляем. 14.5.** Вычислите скалярное произведение двух векторов, если их модули равны 3 и 4, а угол между ними равен: а)  $30^\circ$ ; б)  $150^\circ$ ; в)  $45^\circ$ ; г)  $60^\circ$ ; д)  $90^\circ$ ; е)  $120^\circ$ ; ж)  $135^\circ$ .

**14.6.** Дан квадрат  $ABCD$  со стороной 2. Вычислите скалярные произведения векторов: а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ ; б)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ ; в)  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$ ; г)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CA}$ ; д)  $\vec{DB}$  и  $\vec{AC}$ .

**14.7.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 2. Точка  $K$  – середина его стороны  $BC$ . Вычислите скалярные произведения векторов: а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$ ; б)  $\vec{AB}$  и  $\vec{CA}$ ; в)  $\vec{AB}$  и  $\vec{AK}$ ; г)  $\vec{BC}$  и  $\vec{AK}$ ; д)  $\vec{CA}$  и  $\vec{AK}$ .

**14.8.** Вычислите угол между векторами: а) (1, -3) и (2, 6); б) (-2, 2) и (3, 0); в) (3, 4) и (4, 3); г) (2, -3) и (3, 2); д) (1, 1) и (2, 3).

**14.9.** а) Найдите вектор, перпендикулярный вектору (3, 4). б) Найдите единичный вектор, перпендикулярный вектору (3, 4).

**14.10.** Вычислите длины сторон и углы четырехугольника  $ABCD$  с вершинами  $A(0,1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(4, -3)$ ,  $D(1,-1)$ .

**Доказываем. 14.11.** Докажите, используя скалярное умножение, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

**14.12.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

**1.15. Координаты векторов в пространстве.** Мы уже говорили, что теория векторов по существу многомерна и отмечали аналогию в построении этой теории на плоскости и в трехмерном пространстве. Проследим дальше эту аналогию в вопросах, связанных с координатами векторов. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и обозначим единичные векторы координатных осей  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Возьмем произвольный вектор  $\vec{a}$  и отложим его от начала координат:  $\vec{a} = \vec{OA}$ . Сначала рассмотрим общий случай, когда точка  $A$  не лежит на координатных плоскостях (рис.1.53). Опустим из точки  $A$  перпендикуляры  $AA_1$  на ось  $x$ ,  $AA_2$  на ось  $y$  и  $AA_3$  на ось  $z$ . Построим прямоугольный параллелепипед  $P$  с ребрами  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OA_3$  и диагональю  $OA$ . Тогда

$$\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3. \quad (30)$$

Мы разложили вектор  $\vec{a}$  по координатным осям:

$$\vec{a} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3. \quad (31)$$

Векторы  $\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$  и  $\vec{OA}_3$  называются **составляющими вектора  $\vec{a}$**  по осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

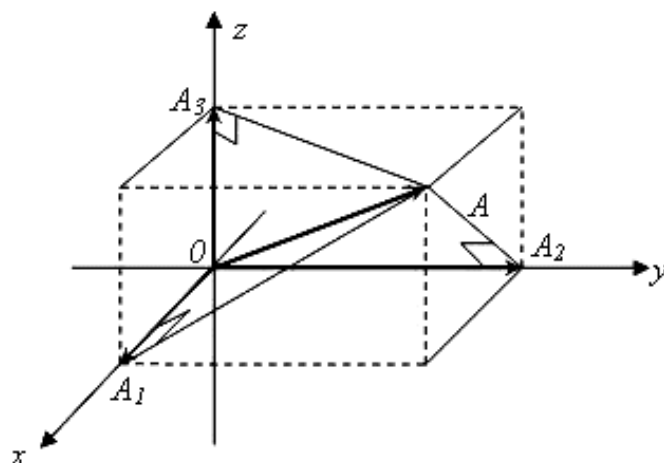


Рис.1.54

Каждая из этих составляющих имеет свою координату на соответствующей оси. Эти координаты обозначаем  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ . Поскольку  $\vec{OA}_1 = a_x \vec{i}$ ,  $\vec{OA}_2 = a_y \vec{j}$  и  $\vec{OA}_3 = a_z \vec{k}$ , то, подставляя эти равенства в формулу (31), получаем представление вектора  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (32)$$

В пункте 1.11 показано, что число  $a_x$  – это координата точки  $A_1$  на оси  $x$ . Аналогично, число  $a_y$  – координата точки  $A_2$  на оси  $y$ , число  $a_z$  – координата точки  $A_3$  на оси  $z$ . Следовательно, тройка чисел  $(a_x, a_y, a_z)$  – это координаты точки  $A$ .

Если точка  $A$  лежит на координатной плоскости  $xOy$ , то в этом случае  $a_z=0$  и равенстве (32) останутся лишь первые два слагаемые. Аналогичное верно и для двух других координатных плоскостей. Равенство (32) установлено для всех случаев.

Полученная тройка чисел  $(a_x, a_y, a_z)$  называется **координатами вектора**  $\vec{a}$  в заданной системе координат. Она же является координатами точки  $A$  – конца вектора  $\vec{OA} = \vec{a}$ .

Последнее утверждение позволяет по каждой упорядоченной тройке чисел  $(a_x, a_y, a_z)$  построить вектор  $\vec{a}$ , координатами которого в заданной системе прямоугольных координат будут числа  $a_x, a_y, a_z$ . Для этого достаточно в этой системе координат построить точку  $A$  с координатами  $a_x, a_y, a_z$  и взять вектор  $\vec{OA}$ . Его координатами и будут числа  $a_x, a_y, a_z$ .

В заданной системе координаты вектора определяются единственным образом.

Если вектор  $\vec{a} = \vec{AB}$  имеет начало в точке  $A(x_A, y_A, z_A)$  и конец в точке  $B(x_B, y_B, z_B)$ , то его координаты находятся по формулам

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \quad a_z = z_B - z_A, \quad (33)$$

аналогичным формулам (17) пункта 1.12.

Как и на плоскости, *при сложении векторов их соответствующие координаты складываются; при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Признак коллинеарности векторов в пространстве, заданных своими координатами, формулируется так же, как и для векторов на плоскости.

Далее, как и на плоскости, *квадрат модуля вектора равен сумме квадратов его координат и скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат.* Запишите эти утверждения формулами.

Повторите доказательства этих утверждений, проведенные в пп.1.12-1.14 для векторов на плоскости, и убедитесь, что для векторов в пространстве они почти такие же: различие лишь в том, что добавляется еще одна координата.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как разложить в пространстве вектор по осям координат?



2. Как выражаются координаты вектора через координаты его начала и конца?
3. Как найти модуль вектора, зная координаты вектора?
4. Как найти расстояние между точками, координаты которых известны?

### Задачи

**Вычисляем. 15.1.** Дан единичный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите координаты векторов  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AB_1}$ ,  $\overrightarrow{AC_1}$ ,  $\overrightarrow{B_1D}$  в системе координат, если : а) начало координат находится в точке  $A$ , а оси координат идут по лучам  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$ ; б) начало координат – в точке  $B$ , а оси  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB_1$ ; в) Начало координат в точке  $O$  – центре грани  $ABCD$ , а оси –  $OA$ ,  $OD$  и  $OO_1$  – где  $O_1$ - центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите длины этих векторов и углы между ними.

**1.16. Координатный метод.** Координаты в геометрию ввели в середине ХУП века французские математики Рене Декарт (1596-1650) и Пьер Ферма (1601-1665). Ими был создан новый раздел геометрии – **аналитическая геометрия**, в которой геометрические фигуры на координатной плоскости или в пространстве, где введены координаты, задаются алгебраическими уравнениями и геометрические задачи решаются алгебраическими методами. В честь Р.Декарта прямоугольные системы координат называют также *декартовыми координатами*.

Говорят, что некоторое алгебраическое уравнение задает фигуру  $F$  на координатной плоскости, если точка принадлежит этой фигуре тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению.

Проиллюстрируем это положение, выведя уравнение окружности  $F$  с центром в точке  $A$  и радиусом  $R$ .

□ Введем на плоскости декартовы координаты  $x, y$ . Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(a, b)$  (рис.1.54). Точка  $M(x, y)$  принадлежит окружности  $F$  тогда и только тогда, когда  $AM = R$ , или, что равносильно, тогда и только тогда, когда  $AM^2 = R^2$ . Если записать последнее равенство через координаты точек  $A$  и  $M$  (см.(9) в п.1.12), то и получим уравнение окружности  $F$ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (34)$$

В частном случае, когда центр окружности находится в начале координат, уравнение (34) упрощается:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (35)$$

Еще один пример задания фигуры уравнением. Покажем, что *прямая на координатной плоскости задается линейным уравнением*, т.е. уравнением вида

$$ax + by + c = 0, \quad (36)$$

при условии, что пара чисел  $(a, b)$  – ненулевая, т.е. хотя бы одно число из этой пары отлично от нуля.

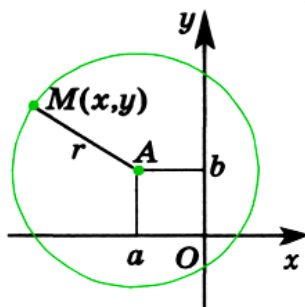


Рис.1.54

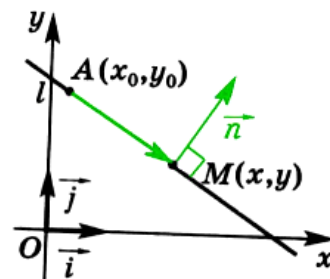


Рис.1.55

Так как мы уже познакомились с векторами и с их координатами, то, решая эту задачу, будем сочетать метод координат с векторным методом, обычную алгебру и векторную алгебру. Такое сочетание мы уже осуществляли в пунктах 1.12-1.14.

□ Рассмотрим прямую  $p$ , на которой лежит точки  $A(x_0, y_0)$ . Возьмем любой ненулевой вектор  $\vec{n}=(a,b)$ , перпендикулярный прямой  $p$  (рис.1.55). Этот вектор называют **нормалью к прямой  $p$** . Точка  $M(x,y)$  принадлежит прямой  $p$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{AM}$  и  $\vec{n}$  взаимно перпендикулярны, а это имеет место тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. выполняется равенство

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (37)$$

Раскрыв скобки в (37) и положив  $c = -a x_0 - b y_0$ , приходим к уравнению (36). ■

Зная, как задаются уравнениями прямые и окружности, мы теперь можем решать различные задачи об этих фигурах. Например, в разделе «Фигуры вращения» мы сможем, применяя метод координат, решить вопрос о взаимном расположении двух окружностей.

Выводя уравнения окружности и прямой, мы рассматривали произвольную систему декартовых координат. Но обычно, решая геометрическую задачу методом координат, выбирают оси координат так, чтобы алгебраические преобразования были проще.

Как и решение задачи векторным методом, решение задачи методом координат имеет три этапа: во-первых, выбирают удобную систему координат и условие задачи записывают в координатном виде; во-вторых, решают эту задачу, используя методы алгебры; в-третьих, полученный результат истолковывают в исходных геометрических терминах. Проследим за этими тремя этапами, решая следующую задачу:

**З а д а ч а .** *Найти множество точек, равноудаленных от данной прямой и от данной точки, не лежащей на данной прямой.*

Прежде чем перейти к решению этой задачи, вспомните, что аналогичные по условию задачи вы уже решали. Еще в седьмом классе вы установили, что множеством точек, равноудаленных от двух данных точек  $A$  и  $B$ , является серединный перпендикуляр отрезка  $AB$  (рис.1.56).

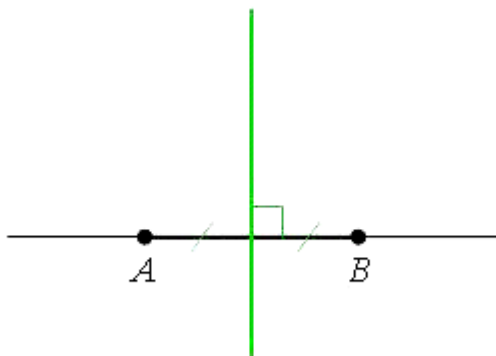


Рис.1.56

Несколько позднее вы выяснили, что множеством точек, равноудаленных от двух прямых  $a$  и  $b$ , является либо параллельная им прямая  $c$ , в случае когда  $a$  и  $b$  параллельны (рис. 57,а), либо пара пересекающихся взаимно перпендикулярных прямых  $c$  и  $d$ , в случае, когда  $a$  и  $b$  пересекаются (рис.57,б).

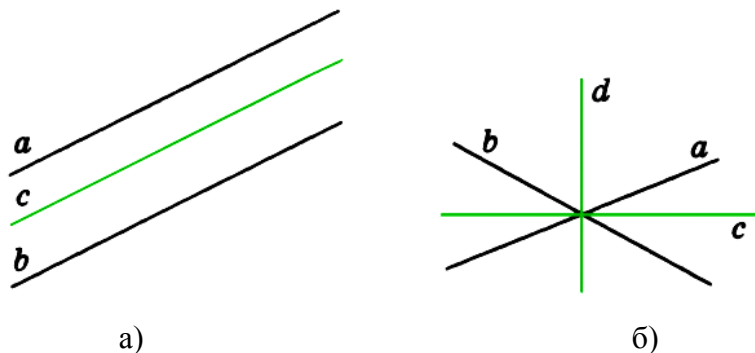


Рис.1.57

Так что решаемая сейчас задача естественным образом дополняет эти уже решенные ранее задачи. Но попытка угадать ее ответ, оставаясь в рамках классической планиметрии,

ничего не дает: искомое множество явно не является ни прямой, ни окружностью. Придется выйти из этих рамок и применить метод координат.

**Решение. 1-ый этап.** Пусть нам заданы прямая  $a$  и точка  $A$ , не лежащая на этой прямой (рис.1.58,а). Как мы говорили, сначала надо выбрать удобную систему координат и записать на языке алгебры условие задачи. Будем считать осью  $x$  прямую  $a$ , а ось  $y$  проведем через точку  $A$  так, чтобы точка  $A$  лежала на положительной ее полуоси (рис. 1.58, б). Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(0, p)$ . Число  $p$  положительно.

Возьмем произвольную точку  $M(x,y)$  и будем считать, что она равноудалена от прямой  $a$  и точки  $A$  (рис.1.58, в). Тогда точка  $M$  лежит с одной стороны с точкой  $A$  от прямой  $a$  (почему?). Поэтому координата  $y$  точки  $M$  положительна и длина перпендикуляра  $MK$ , опущенного из точки  $M$  на прямую  $a$ , равна  $y$ . Так как

$$MA = \sqrt{x^2 + (y - p)^2},$$

то условие задачи ( $MA = MK$ ) в выбранной нами системе координат запишется так:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y. \quad (38)$$

1-ый этап завершен. Уравнение (38) является уже уравнением искомого множества, но каким является это множество пока из этого уравнения не ясно. Это станет ясно после второго этапа решения.

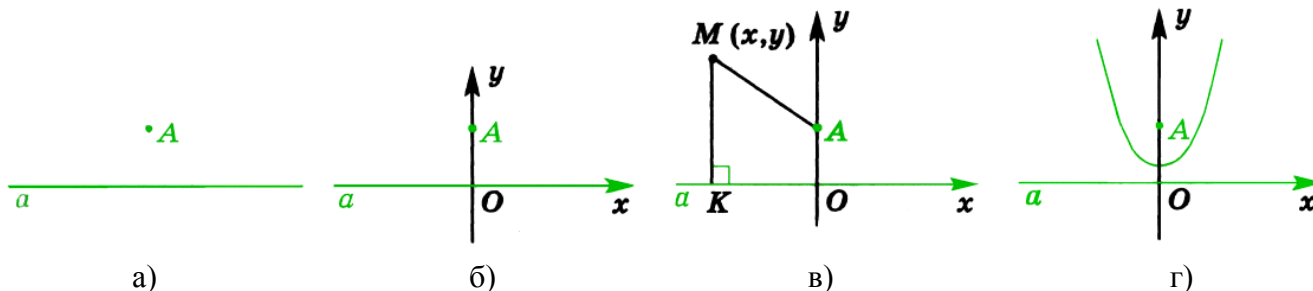


Рис.1.58

**2-ой этап.** Упрощаем уравнение (38), возводя обе части его в квадрат и приводя подобные члены. Получаем уравнение

$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}. \quad (39)$$

Координата  $y$  любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (38), положительна. Поэтому уравнение (39) равносильно уравнению (38) (убедитесь в этом, вернувшись от (39) к (38)). Второй этап завершен.

**3-ий этап.** Какую фигуру задает уравнение (39) нам хорошо известно - это парабола, график квадратичной функции (рис.1.58, г). Задача решена - множество, о котором идет речь в условии задачи - парабола. ■

Разобравшись в решении этой задачи, подумайте над следующими вопросом: чем является множество точек (на плоскости), равноудаленных от прямой  $a$  и точки  $A$ , когда точка  $A$  лежит на прямой  $a$ ? Нужен ли для ответа на этот вопрос метод координат?

В заключение отметим, что построение графиков функций – это тоже одно из применений метода координат.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что значит, некоторое уравнение задает фигуру на координатной плоскости?
2. Как бы сформулировали ответ на такой вопрос: что значит, некоторое неравенство задает фигуру на координатной плоскости? Приведите примеры.
3. Как бы сформулировали ответ на такой вопрос: что значит, некоторая система уравнений задает фигуру на координатной плоскости? Приведите примеры.

4. Каким уравнением задается окружность?
5. Каким уравнением задается прямая? Где вы ранее встречались с уравнением прямой?
6. Каковы этапы решения геометрических задач методом координат?

### Задачи

**Рисуем. 16.1.** Нарисуйте фигуру, заданную на координатной плоскости  $x, y$  уравнением:

- а)  $x=2$ ; б)  $y=-2$ ; в)  $x(x-2)=0$ ; г)  $y(y+2)=0$ ; д)  $x^2 - y^2=0$ ; е)  $|x|=1$ ; ж)  $|y|=x^2$ ; з)  $|x|+|y|=1$ ; и)  $|x|=|y|$ . А что эти уравнения зададут в пространстве?

**16.2.** Нарисуйте фигуру, заданную на координатной плоскости  $x, y$  неравенством: а)  $x \geq 2$ ; б)  $y \leq -2$ ; в)  $x(x-2) \geq 0$ ; г)  $y(y+2) \leq 0$ ; д)  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ; е)  $|x| \geq 1$ ; ж)  $|y| \leq x^2$ ; з)  $|x|+|y| \leq 1$ ; и)  $|x| \geq |y|$ . А что эти неравенства зададут в пространстве?

**Исследуем. 16.3.** По какой траектории движется в системе координат точка  $K$ , если она равноудалена: а) от точек  $A(2, 0)$  и  $B(0, -3)$ ; б) от точек  $A(-3, 0)$  и  $B(4, 1)$ . Напишите уравнение этой траектории.

**16.4.** По какой траектории движется в системе координат точка  $K$ , если она равноудалена: а) от точки  $A(2, 0)$  и оси  $y$ ; б) от точки  $A(-3, 0)$  и оси  $x$ ; в) от точки  $A(2, 3)$  и прямой  $x=1$ ; г) от точки  $A(-1, 2)$  и прямой  $y=4$ ? Напишите уравнение этой траектории.

**16.5.** По какой траектории движется в системе координат точка  $K$ , если  $KA=2KB$  и точки  $A$  и  $B$  таковы: а)  $A(1, 0)$  и  $B(-5, 0)$ ; б)  $A(0, 2)$  и  $B(0, -6)$ ; в)  $A(2, 2)$  и  $B(-6, -6)$ ? Напишите уравнение этой траектории.

**16.6.** Дан отрезок  $AB$  длиной 2. По какой траектории движется точка  $K$  такая, что: а)  $KA^2 - KB^2 = 1$ ; б)  $KA^2 + KB^2 = 4$ ?